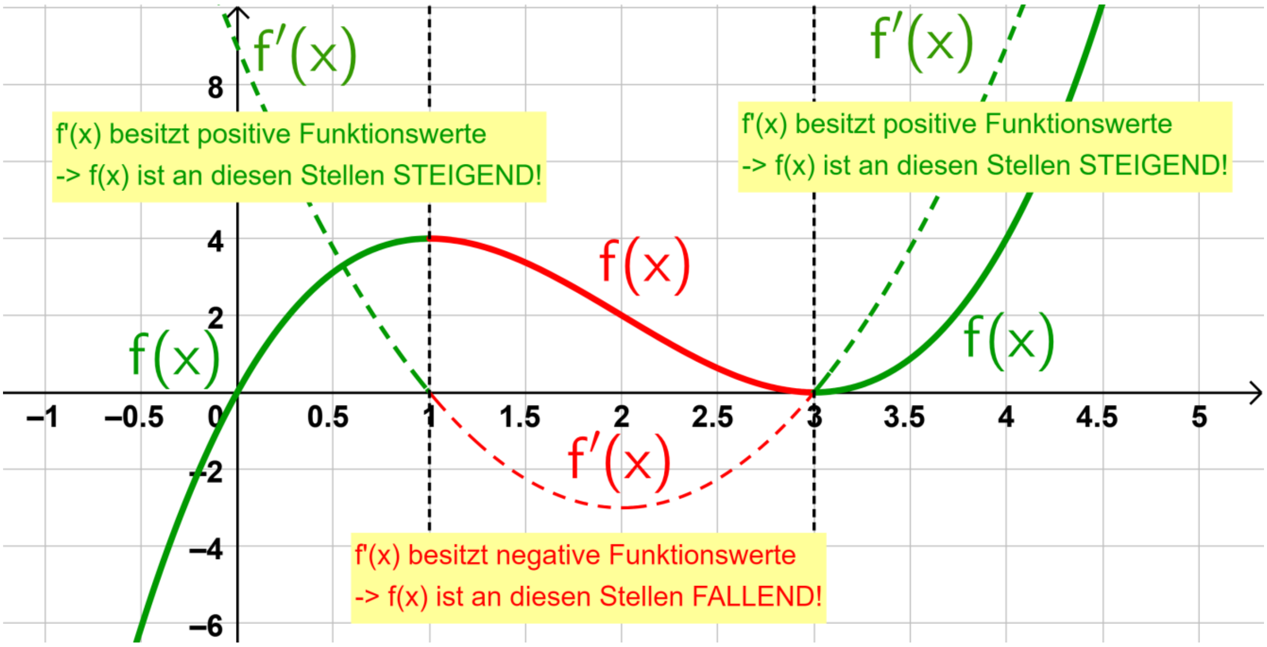
AN3 Ableitungsfunktion, Stammfunktion

Maturaskript AHS (37 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **AN3.1** die Begriffe Ableitungsfunktion und Stammfunktion kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können
- **AN3.2** den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können
- **AN3.3** Eigenschaften von Funktionen mithilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen



Prof. πegischer

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

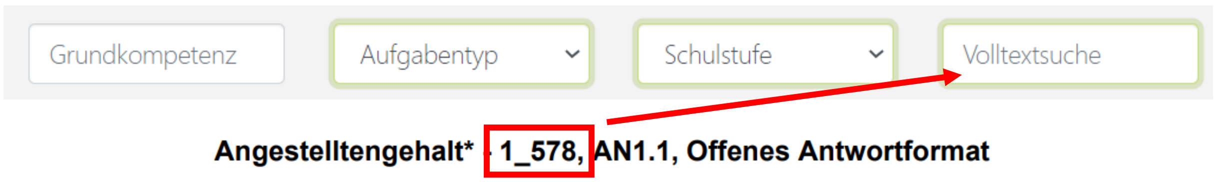
Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln

- Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen.
- Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen.
- Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden.
- Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden.
- Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.

Weitere Regeln für Lehrpersonen

WICHTIGSTE REGEL: LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden:

- Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen.
- LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben.
- Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben.
- LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

AN3 – Ableitungsfunktion, Stammfunktion

Video

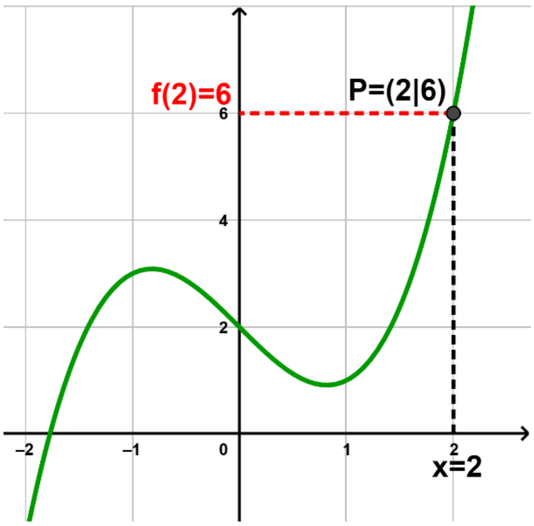
1. Bedeutung: Die Funktion und ihre Ableitungen

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
gibt an ...	den **Funktionswert** an der Stelle x	die **Steigung** von f an der Stelle x	die **Krümmung** von f an der Stelle x
physikalische Interpretation	**Zurückgelegter Weg** in einem Zeit-Ort-Diagramm	momentane Geschwindigkeit	momentane Beschleunigung
$wenn\ > 0$	Funktionswert ist positiv und oberhalb der x-Achse	$f'(x) > 0 \rightarrow$ Funktion ist steigend.	$f''(x) > 0 \rightarrow$ die Funktion ist linksgekrümmt.
$wenn\ < 0$	Funktionswert ist negativ und unterhalb der x-Achse	$f'(x) < 0 \rightarrow$ Funktion ist fallend.	$f''(x) < 0 \rightarrow$ die Funktion ist rechtsgekrümmt.
$wenn\ = 0$	Funktionswert ist 0 -> Nullstellen	Die Funktion ist konstant und besitzt keine Steigung an dieser Stelle.	Die Funktion besitzt keine Krümmung an dieser Stelle.

1. Die Funktion $f(x)$:

$f(x)$ ... gibt den Funktionswert (y-Wert) an der Stelle x an!
Man bekommt mit $f(x)$ NUR die fehlende y-Koordinate eines Punktes!

Da man für x jeden Wert des Definitionsbereiches einsetzen kann, gibt es **unendliche viele Punkte**, die dabei entstehen. Und genau aus diesen Punkten entsteht der **Graph**!



Wichtige Information (Ableitungen): Die Ableitungen einer Funktion $f(x)$ liefern uns nur **Informationen** über den Verlauf (in Bezug auf **Steigung** und **Krümmung**) der **ursprünglichen (!!!) Funktion $f(x)$**.

2. Die erste Ableitung $f'(x)$:

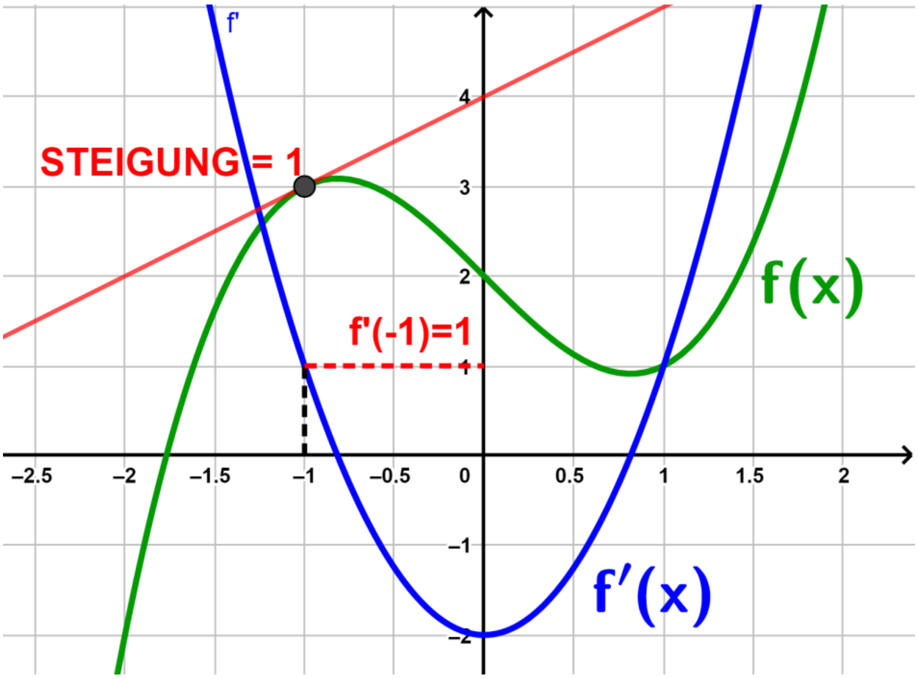
$f'(x)$ ... gibt die **Steigung** der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an der Stelle x an!

Geometrisch bedeutet die erste Ableitung die **Steigung der Tangente** im jeweiligen Punkt!

Mit der ersten Ableitung erhalten wir die Steigung **in einem einzigen (!!!) Punkt (an der Stelle x)**, da sich die Steigung stetig ändern kann (Ausnahme: Lineare Funktionen: Steigung ist immer gleich).

Beispiel: $f(x) = x^3 - 2x + 2$ -> $f'(x) = 3x^2 - 2$

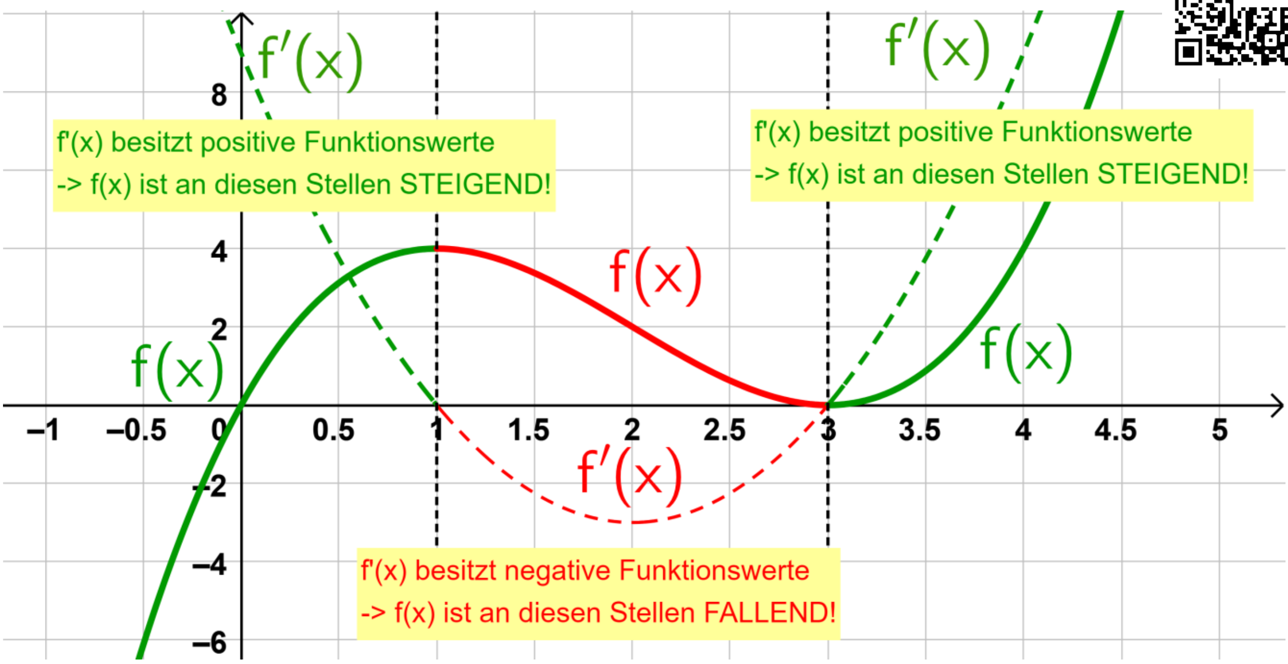
Ist z.B. $f'(-1) = 1$, so steigt die Funktion f(x) an der Stelle $x = -1$ im Punkt (-1|3) um der Wert 1. Ist $f'(0) = -2$, dann fällt die Funktion f(x) im Punkt (0|2) um den Wert -2.



Der Funktionswert der ersten Ableitung f'(x) an der Stelle x gibt die Steigung der ursprünglichen Funktion f(x) an der Stelle x an.

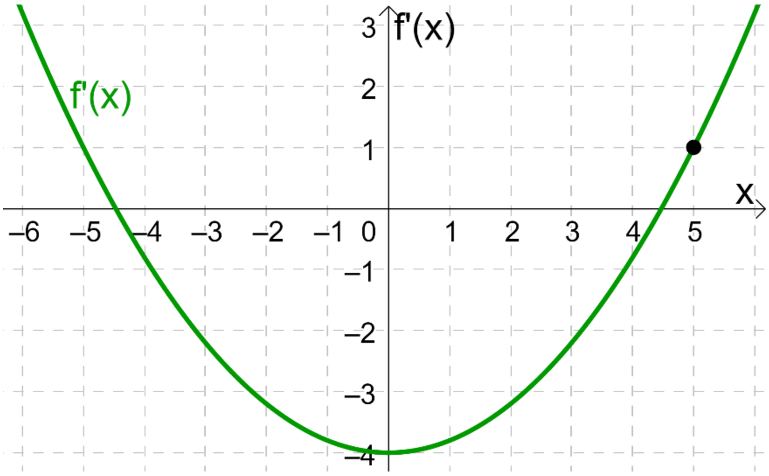
Video

Zusammenhang Graph: Ursprüngliche Funktion und 1. Ableitung

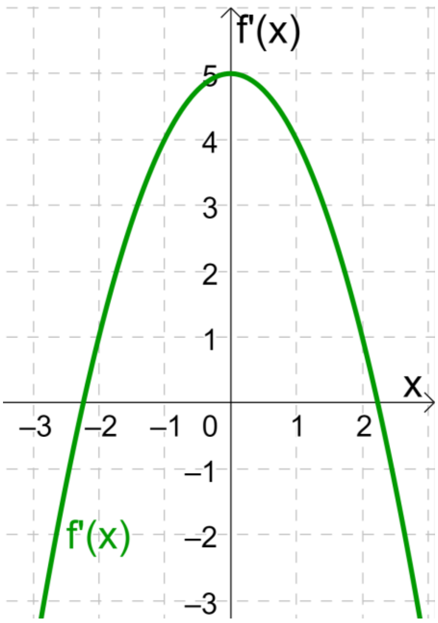
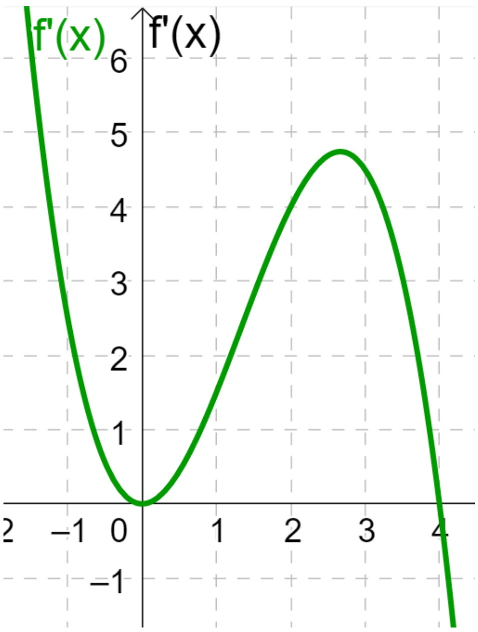


- $(-\infty; 1)$: $f'(x)$ ist zwar fallend, besitzt aber stets positive Funktionswerte. Es gilt in diesem Intervall: $f'(x) > 0$. Dies hat zur Folge, dass die ursprüngliche Funktion $f(x)$ in diesem Intervall steigend ist.

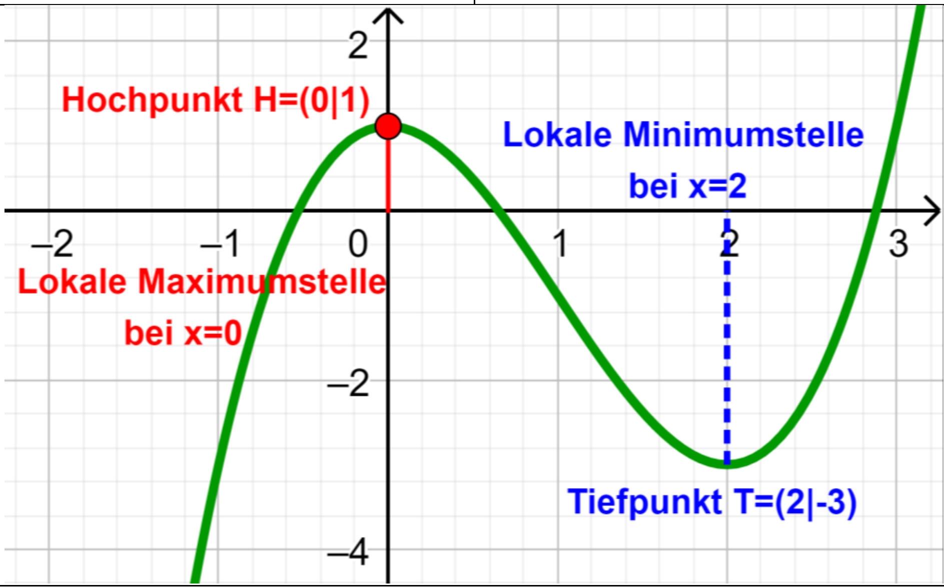
Bsp. 1) Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$. Der Punkt $P = (3|7)$ liegt auf dem Graphen der Funktion f. Bestimme die Gleichung der Tangente der Funktion f durch den Punkt P.



Bsp. 2) Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$. Bestimme die Steigung der ursprüngliche Funktion $f(x)$ an den gesuchten Stellen.

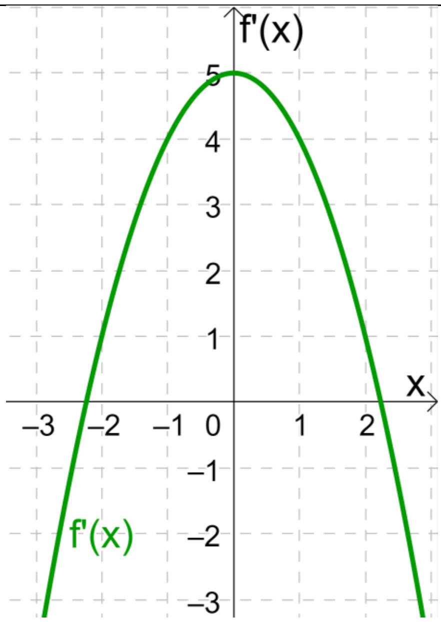
<table>
<tr><td>$x_1 = -2 ; x_2 = 0 ; x_3 = 1$
</td><td>$x_1 = 0 ; x_2 = 2 ; x_3 = 4$
</td></tr>
</table>

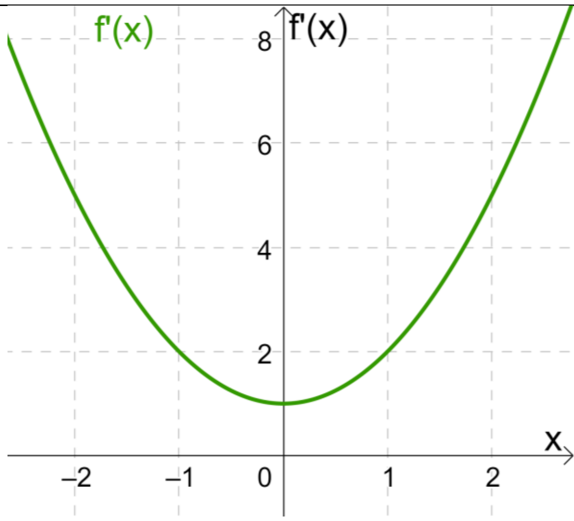
Lokale Extremstellen	
Bei lokalen Extremstellen findet stets ein **Monotoniewechsel** statt!!!	
Lokale Minimumstelle ▪ **Monotoniewechsel**: fallend -> steigend ▪ Bemerkung: Die Minimumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Minimum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Tiefpunkt**.	**Lokale Maximumstelle** ▪ **Monotoniewechsel**: steigend -> fallend ▪ Bemerkung: Die Maximumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Maximum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Hochpunkt**.

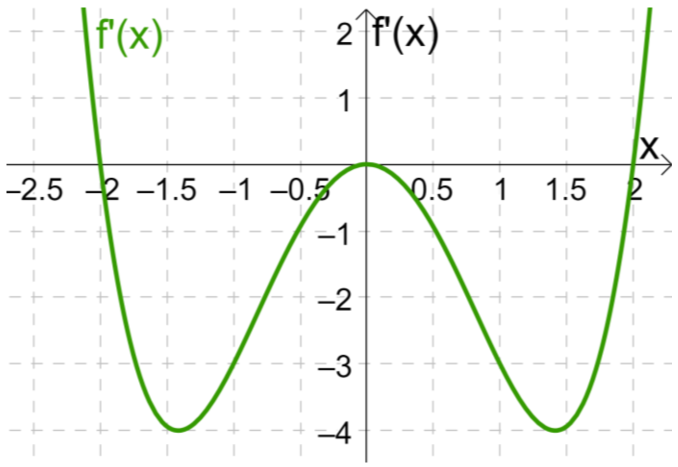


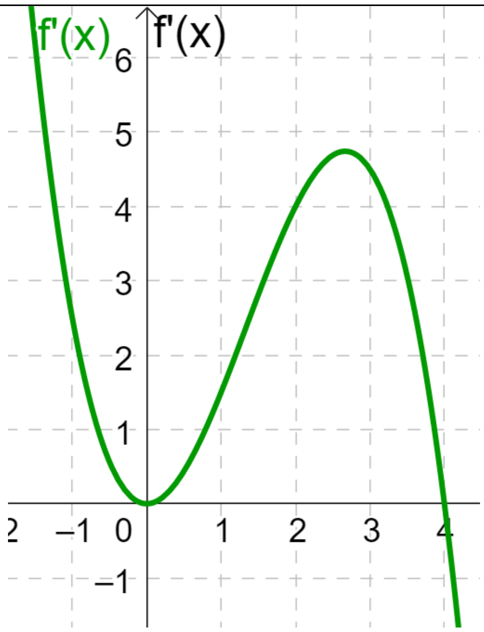
Bsp. 3) Gegeben ist der Graph einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.

- Bestimme die möglichen Extremstellen der Funktion f und gib auch an, welcher Art sie sind.
- Bestimme das Monotonieverhalten der ursprünglichen Funktion $f(x)$.



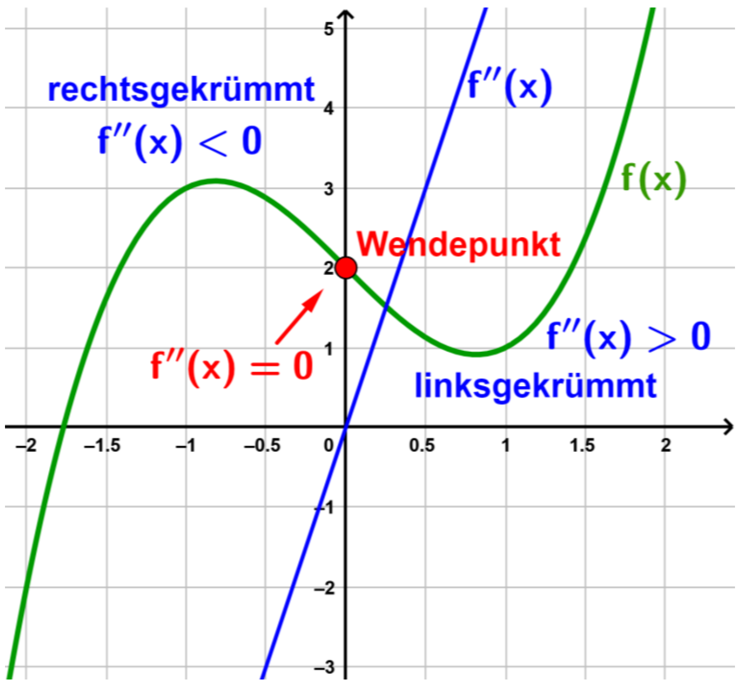






3. Die zweite Ableitung $f''(x)$:

$f''(x)$ … gibt die Krümmung der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an der Stelle x an.



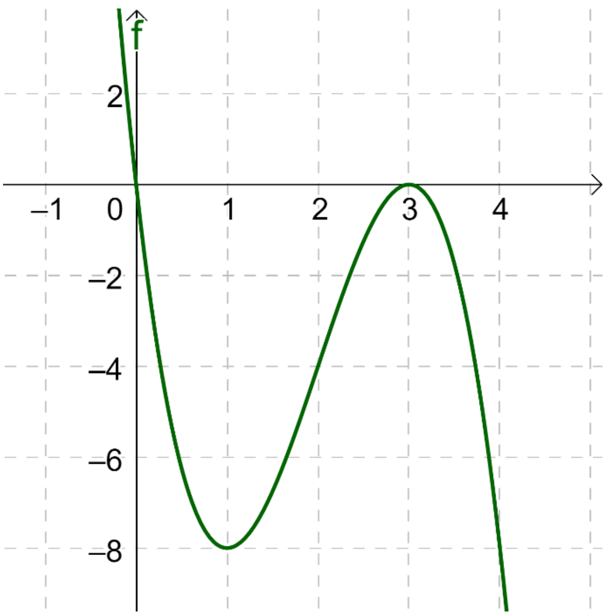
- Ist $f''(x) > 0$: Die Funktion f(x) ist an der Stelle x linksgekrümmt.
- Ist $f''(x) = 0$: Die Funktion f(x) weist an der Stelle x keine Krümmung auf.
- Ist $f''(x) < 0$: Die Funktion f(x) ist an der Stelle x rechtsgekrümmt.

Bsp. 4) Gegeben ist eine Funktion $f(x)$. Gib folgendes an:

(1) Die erste Ableitung f'(x) – Was gibt f'(x) an?
(2) Die zweite Ableitung f''(x) – Was gibt f''(x) an?
(3) Steigung an den Stellen $x_1 = 3 \; und \; x_2 = 7$
(4) Krümmung an den Stellen $x_1 = -4 \; und \; x_2 = 8$
(5) Funktionswert & Punkt an den Stellen $x_1 = -5 \; und \; x_2 = 10$

a. $f(x) = x^2 - 5x$	b. $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2$	c. $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 1$

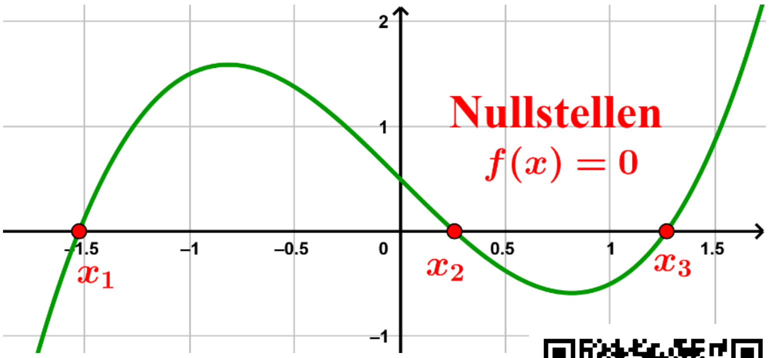
Bsp. 5) Gegeben ist der Graph einer Funktion $f(x)$. Kreuze **alle** zutreffende/n Aussagen an.



$f'(0) < 0$	O
$f'(3) = 0 \; \& \; f''(3) < 0$	O
$f''(2) = 0 \; \& \; f'''(2) \neq 0$	O
$f'(1) = 0 \; \& \; f''(1) < 0$	O
$x = 3$ ist eine lokale Maximumstelle	O
$f(1) < 0$	O
$f''(3) > 0$	O
$f(3) = 0 \; \& \; f'(3) = 0$	O
$f(2) > 0$	O
$f'(2{,}5) > 0$	O

2. Anwendungen von $f(x), f'(x), f''(x)$ und $f'''(x)$:

1. Bestimmung der Nullstellen:



Nullstellen sind Stellen, an denen die Funktion die x-Achse schneidet (d.h. an denen der Funktionswert gleich 0 ist!)

Mathematisch können Nullstellen ermittelt werden, wenn man die Funktion $f(x)$, die die Funktionswerte liefern, 0 setzt.

$$f(x) = 0$$

2. Bestimmung der Extremstellen:

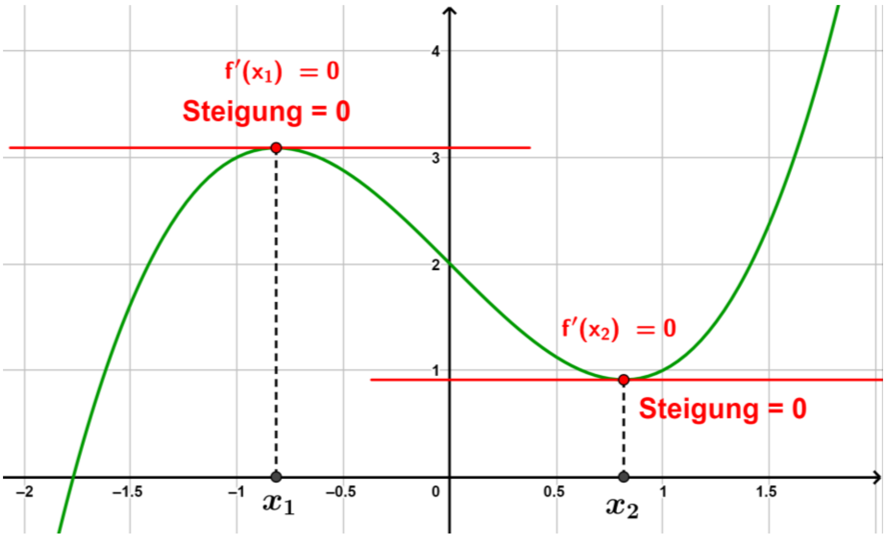
Schritt 1 (Notwendige Bedingung): An Extremstellen gibt es **keine Steigung**, da entweder der maximale, oder der minimale Wert erreicht ist:

$$f'(x) = 0$$

Video

Mit dieser **Gleichung** erhältst du **alle Stellen** (x-Werte), an denen die **Steigung 0 ist**!

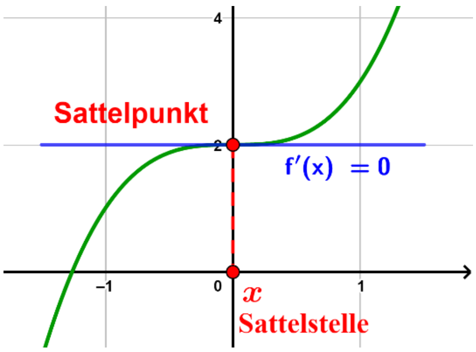
! Nicht mehr, aber auch nicht weniger !



Man kann noch nicht sagen, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt (oder sogar keines von beiden – siehe Ausnahme)!

Ausnahme:

An sogenannten Sattelstellen ist die Steigung der Polynomfunktion 0. Im Gegensatz zu einer Extremstelle ändert sich das Monotonieverhalten nicht (kein Extremum!).

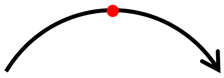


Schritt 2 (Hinreichende Bedingung): Jetzt klären wir, ob es sich um eine **Maximum**-, **Minimum**- oder gar eine **Sattelstelle** handelt. Dafür musst du den Verlauf der Funktion betrachten. An all diesen Stellen ist die Steigung wie gesagt 0!

ABER: welchen Wert nimmt die Krümmung an – Ist die Funktion an dieser Stelle links- oder rechtsgekrümmt, oder herrscht gar keine Krümmung?

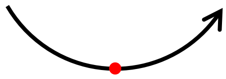
Setze dazu die in – Schritt 1 – erhaltenen x-Werte nun in die 2. Ableitung ein:

➔ Ist die Funktion rechtsgekrümmt ($f''(x) < 0$), kann es sich nur um eine Maximumstelle handeln!



Steigung $= 0 : f'(x) = 0$
Rechtsgekrümmt: $f''(x) < 0$

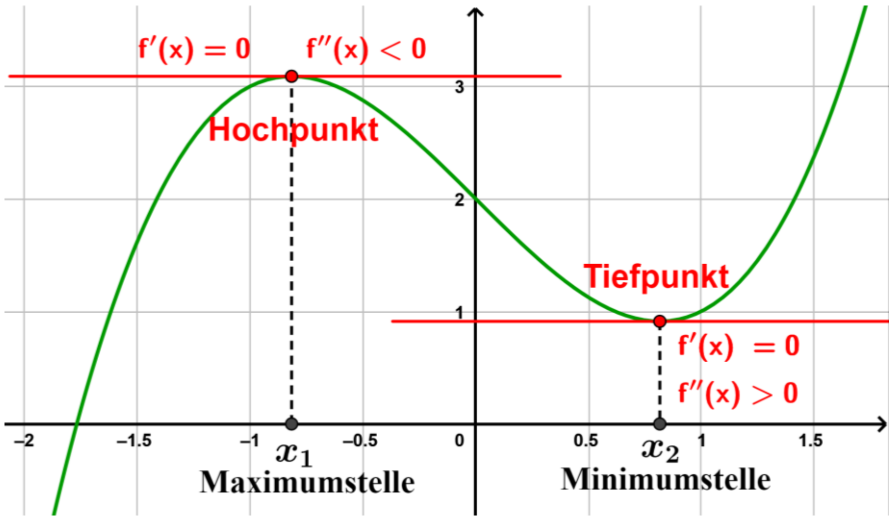
➔ Ist die Funktion linksgekrümmt ($f''(x) > 0$), kann es sich nur um eine Minimumstelle handeln!



Steigung $= 0 : f'(x) = 0$
Linksgekrümmt: $f''(x) > 0$

➔ Herrscht keine Krümmung vor ($f''(x) = 0$), -> Sattelstelle (Achtung: KEINE Extremstelle)

Schritt 3: Mit den Maximum- und Minimumstellen erhält man nur die x-Werte der Extrempunkte. Möchtest du die fehlende y-Koordinate zur Bestimmung des zugehörigen Punktes erhalten (Hoch- und Tiefpunkt), so musst du die x-Werte in die ursprüngliche Funktion f(x) einsetzen!



Schritt 1
$f'(x) = 0$

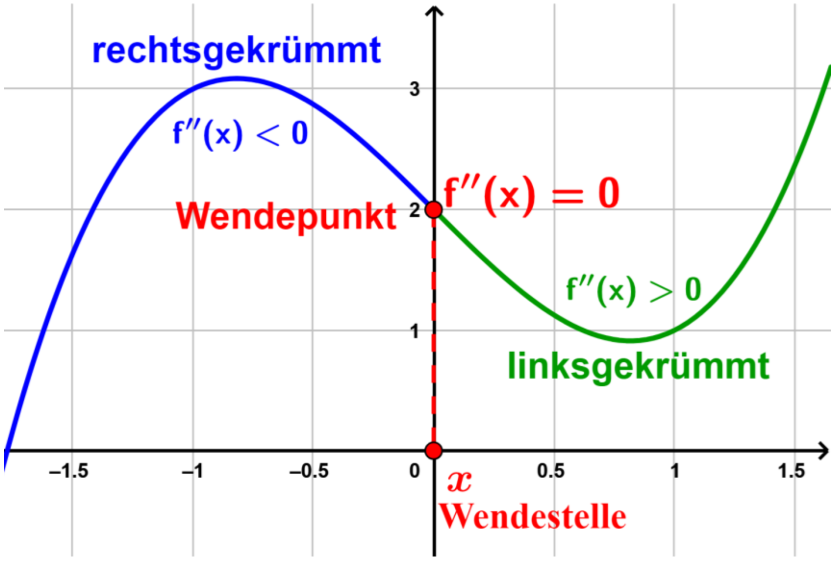
Schritt 2
erhaltene x-Werte in die zweite Ableitung $f''(x)$ einsetzen
$f''(x) > 0$ *Minimumstelle*
$f''(x) < 0$ *Maximumstelle*
$f''(x) = 0$ *Sattelstelle*

Schritt 3
Hochpunkt/Tiefpunkt
x-Wert in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen (=zugehörige y-Koordinate)

Bsp. 6) Gegeben ist eine Funktion f. Bestimme mit Hilfe der **<u>Differentialrechnung</u>** (Denk- und Rechenschritte müssen nachvollziehbar sein!) die Extremstellen. Gib nachweislich an, um welche Extremstellen es sich dabei handelt. Welche besonderen Punkte liegen an diesen Stellen? Gib die Koordinaten an.

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$	b. $f(x) = -4x^2 + 10$	c. $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 7$

3. <u>Bestimmung der Wendestellen:</u>



Video

Schritt 1 (Notwendige Bedingung): An Wendestellen herrscht **keine Krümmung**, d.h.

$$f''(x) = 0$$

Bei Wendestellen ändert sich das <u>Krümmungsverhalten</u> (von linksgekrümmt auf rechtsgekrümmt, bzw. umgekehrt).

Schritt 2 (Hinreichende Bedingung): Um sicher zu gehen, dass es sich um eine Wendestelle handelt, muss folgende Bedingung gelten:

$$f'''(x) \neq 0$$

Schritt 1
$f''(x) = 0$

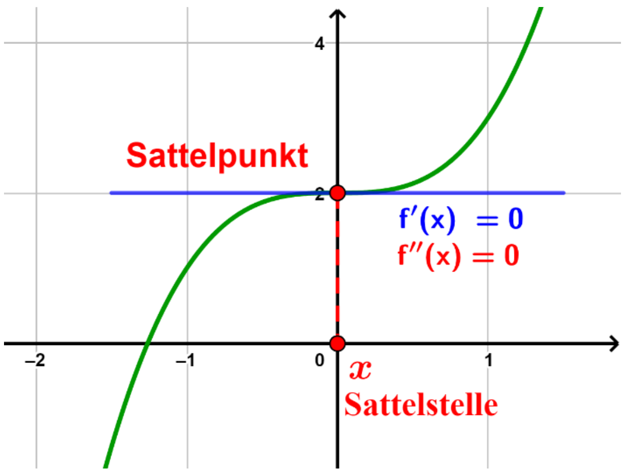
→

Schritt 2
erhaltenen x-Wert in die dritte Ableitung $f'''(x)$ einsetzen:
$f'''(x) \neq 0 \quad Wendestelle$

→

Schritt 3
Wendepunkt
x-Wert in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen (=zugehörige y-Koordinate)

Bemerkung: Eine Sattelstelle ist ein Sonderfall einer Wendestelle, da zusätzlich die Steigung 0 ist! Eine Sattelstelle ist aber kein Extremum, da sich das Monotonieverhalten **<u>nicht</u>** ändert!



<table>
<tr><th colspan="3">Bestimmung der Wendetangente</th></tr>
<tr>
<td>
1] Bestimmung des Wendepunktes
$f''(x) = 0 \ \& \ f'''(x) \neq 0$
$W = (x|f(x))$

2] Wendetangente: $t_w: y = kx + d$

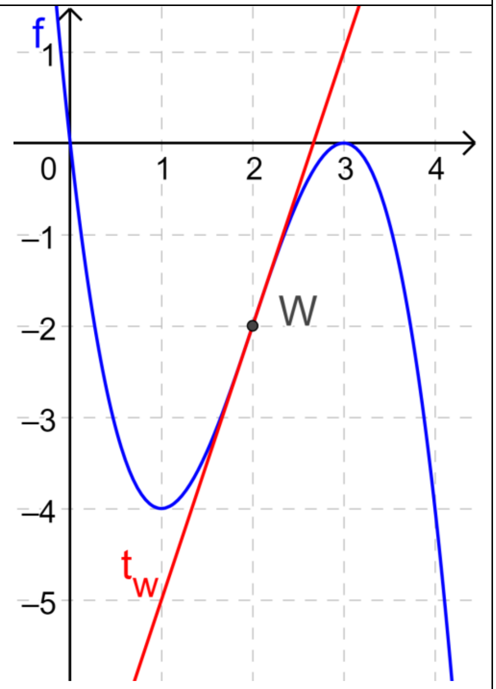
2.1] Bestimmung der Steigung k:
$k = f'(x)$

2.2] Bestimmung der Steigung d:
Wendepunkt in die Funktionsgleichung der Wendetangente einsetzen & umformen.
</td>
<td>
Musterbeispiel:
$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$
$f'(x) = -3x^2 + 12x + 9$
$f''(x) = -6x + 12$
$f'''(x) = -6$

$f''(x) = 0 \rightarrow \quad x = 2$
$f'''(2) = -6 \ \neq 0$ ✓
$x = 2 \ldots Wendestelle$
$f(2) = -2 \rightarrow \boldsymbol{W} = (\mathbf{2}|\mathbf{-2})$

Wendetangente:
$t_w: y = kx + d$

$k = f'(2) = 3$
$t_w: -2 = 3 \cdot 2 + d \quad | -6$
$d = -8$

$\boldsymbol{t_w: y = 3x - 8}$
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Video

Bsp. 7) Gegeben ist eine Funktion f.

(1) Bestimme die Nullstellen.
(2) Bestimme mit Hilfe der **Differentialrechnung** (Denk- und Rechenschritte müssen nachvollziehbar sein!) die Extremstellen. Gib nachweislich an, um welche Extremstellen es sich dabei handelt. Welche besonderen Punkte liegen an diesen Stellen? Gib die Koordinaten an.
(3) Bestimme mit Hilfe der Differentialrechnung (Denk- und Rechenschritte!) die Wendestelle/n bzw. Wendepunkt/e. Gib (falls vorhanden) die Wendetangente/n an.

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	b. $f(x) = x^2 - 4$	c. $f(x) = x^4 - 2x^2$

Video

Bsp. 8) Die Funktion $h(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}70x$ beschreibt die Flugbahn eines Fußballs beim Abstoß eines Tormanns.

- x gibt die horizontale Entfernung (in Meter) des Fußballs vom Abschusspunkt an.
- h(x) gibt die Höhe des Fußballs (in Meter) nach x Metern an.

a. Wähle einen passenden Definitionsbereich für dieses Beispiel.

b. Nach wie vielen Metern erreicht der Ball eine Höhe von 10m?

c. In welcher Höhe befindet sich der Fußball bei einer horizontalen Entfernung von 40m?

d. Bestimme mit Hilfe der **Differentialrechnung**, nach wie vielen Metern der Ball seine maximale Höhe erreicht. Zeige nachweislich, dass des sich um ein Maximum handelt.

Bsp. 9) Die Funktion s(t) gibt die zurückgelegte Strecke eines Autos (Einheit: Meter) in Abhängigkeit der Zeit t in Sekunden an. Die Funktion s(t) ist im Intervall $[0; 40]$ definiert. Für die zurückgelegte Strecke gilt

$$s(t) = -\frac{1}{64}t^3 + \frac{15}{16}t^2$$

a. Berechne den Ausdruck $s(30) - s(15)$ und interpretiere dein Ergebnis im gegebenen Kontext.
b. Bestimme die mittlere Geschwindigkeit v_m des Autos im Zeitintervall $[5; 20]$. Verwende passende Einheiten.
c. Bestimme die Werte $s'(10)$ und $s''(25)$ und interpretiere diese mit korrekten Einheiten im Kontext.
d. Bestimme mit Hilfe der Differentialrechnung, wann das Auto die **maximale Geschwindigkeit** erreicht.

Bsp. 10) Ordne den möglichen Eigenschaften einer Funktion f die entsprechende formale Aussage zu!

Aufgabenstellung:

f hat an der Stelle x eine Minimumstelle	
f hat an der Stelle x eine Nullstelle	
f besitzt an der Stelle x eine Sattelstelle	
f hat an der Stelle x die Steigung 2	

A	$f'(x) = 0 \;\&\; f''(x) < 0$
B	$f'(x) = 0 \;\&\; f''(x) = 0$
C	$f(x) = 0$
D	$f'(x) = 0 \;\&\; f''(x) > 0$
E	$f'(x) = 2$
F	$f'(2) = 2$

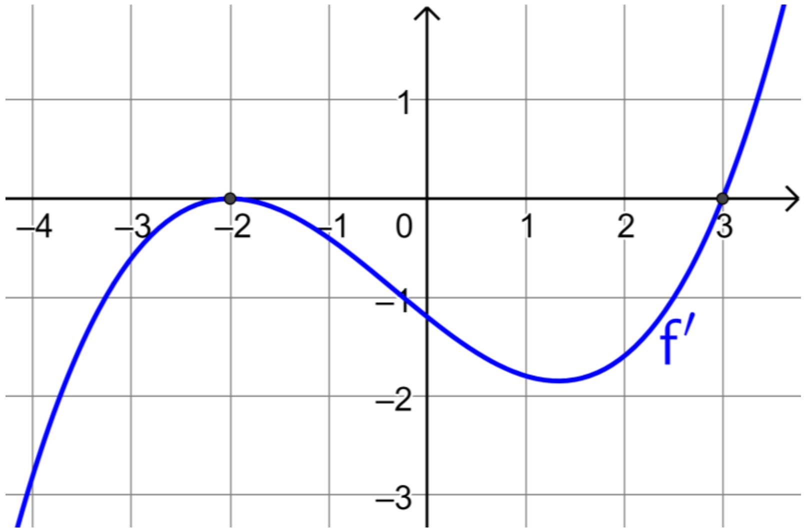
Bsp. 11) Der zurückgelegte Weg eines Autos kann näherungsweise durch die Funktion s(t) beschrieben werden:

$$s(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + \frac{t}{3} \quad mit\ 0 \leq t \leq 3$$

- t … Zeit in Minuten
- s(t) … zurückgelegter Weg zur Zeit t in Kilometer

a. Berechne, nach welcher Zeit t_0 die Beschleunigung im angegebenen Intervall 0 ist.
b. Zeige nachweislich, dass die Geschwindigkeit zu dieser Zeit t_0 maximal ist.

Bsp. 12) Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion $\boldsymbol{f'}$ einer Polynomfunktion f.



Aufgabenstellungen:

a. Gib das **Monotonieverhalten** der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an.
b. Gib **lokale Extremstellen (inkl. Art)** der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an.
c. Gib das **Krümmungsverhalten** der ursprünglichen Funktion f(x) an.

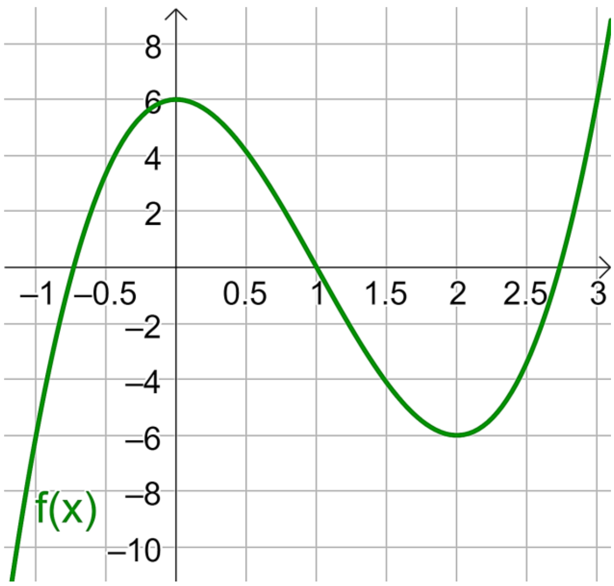
Bsp. 13) Gegeben ist die Funktion $s(t) = -t^4 + 4t^3 + t^2 - t + 100 \quad (s\ in\ m, t\ in\ sek)$

Bestimme die **maximale <u>Beschleunigung</u> (!)** mit Hilfe der Differentialrechnung. Zeige nachweislich, dass es sich um ein **<u>Maximum</u>** handelt.

Bsp. 14) Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades. Von dieser Polynomfunktion existieren die beiden Ableitungsfunktionen f‘ und f‘‘.

An den Stellen 0 und 2 liegen lokale Extremstellen. An der Stelle 3 liegt eine Wendestelle.

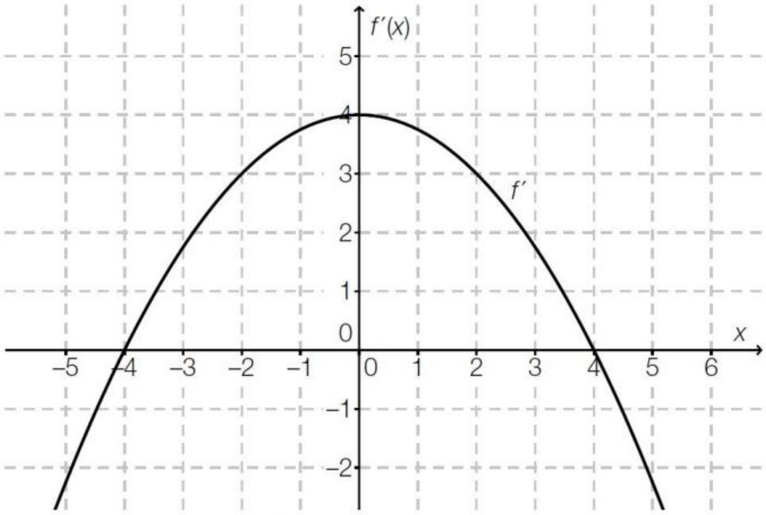
Aufgabenstellung: Bestimme falls möglich den exakten Wert des gegebenen Ausdrucks. Wenn dies nicht möglich ist, schränke den Wert mit $<0, =0\ oder\ >0$ ein.



$f(1{,}5)$
$f'(0)$
$f'(2) - f'(3)$
$f''(2{,}5)$
$f''(1) + f(2)$
$f(-1) + f'(0) + f''(1)$

Ableitung* - 1_358, AN3.2, Offenes Antwortformat

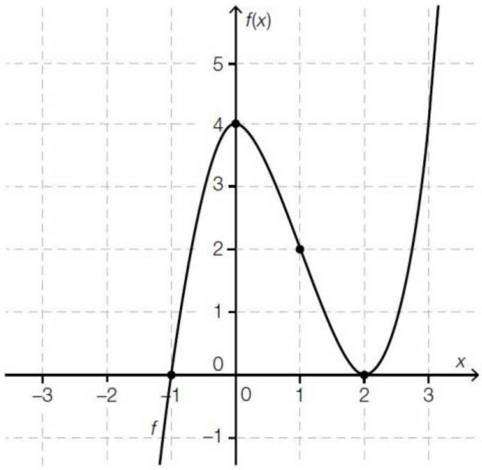
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der 1. Ableitungsfunktion f' einer Polynomfunktion f dargestellt.



Bestimmen Sie, an welchen Stellen die Funktion f im Intervall $(-5; 5)$ jedenfalls lokale Extrema hat! Die für die Bestimmung relevanten Punkte mit ganzzahligen Koordinaten können der Abbildung entnommen werden.

Eigenschaften der Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion 3. Grades* - 1_455, AN3.2, 2 aus 5

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f dritten Grades. Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.



Welche der folgenden Aussagen treffen auf die Ableitungsfunktion f' der Funktion f zu? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Funktionswerte der Funktion f' sind im Intervall $(0; 2)$ negativ.	☐
Die Funktion f' ist im Intervall $(-1; 0)$ streng monoton steigend.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 2$ eine Wendestelle.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 1$ ein lokales Maximum.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle.	☐

3. Graphisches Differenzieren von Polynomfunktionen (N-E-W Regel)

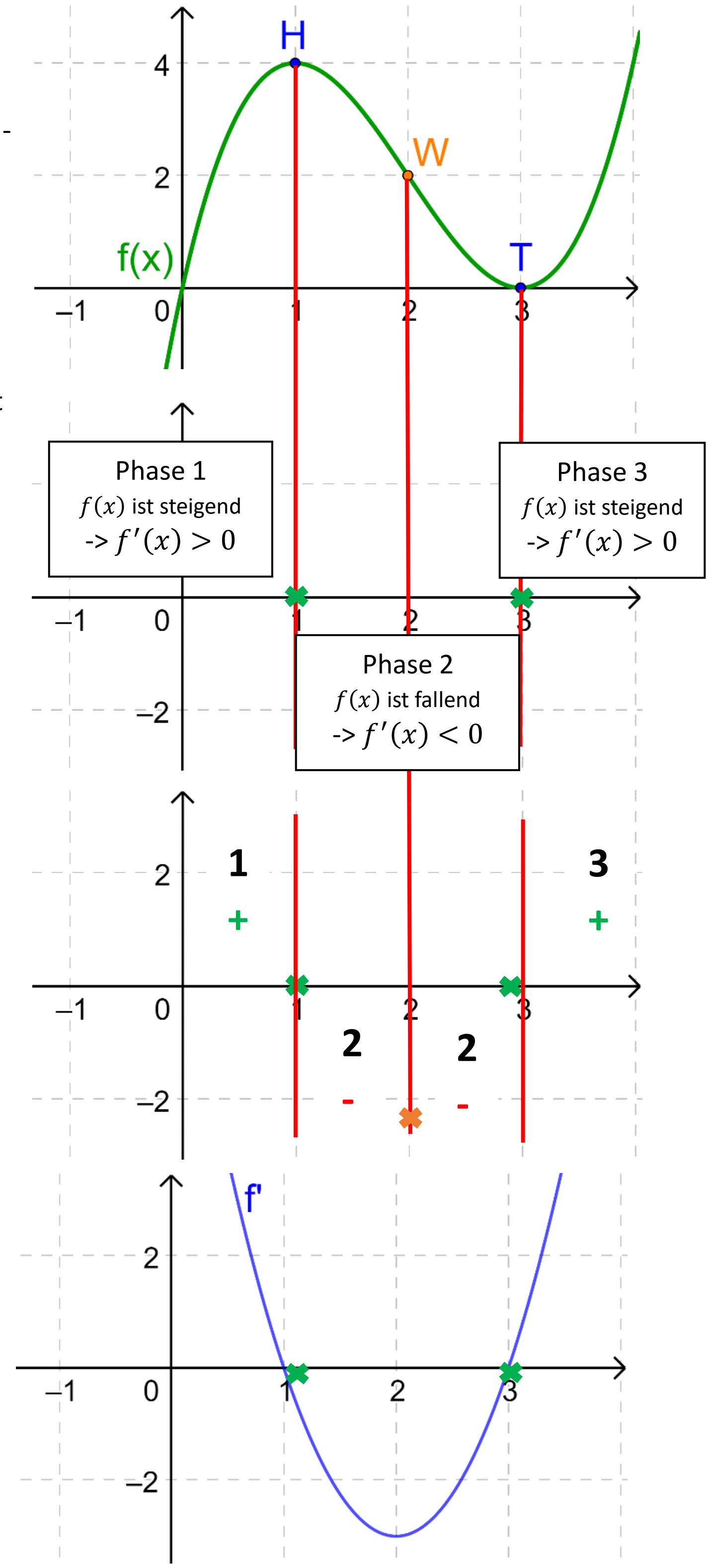
<u>Grundregel:</u>

$f(x)$:	N	E	W	
		⬇	⬇	
$f'(x)$:		N	E	W
			⬇	⬇
$f''(x)$:			N	E	W

Video

- **Nullstellen** der ursprünglichen Funktion haben **keine Bedeutung** in der graphischen Darstellung der Ableitungsfunktion
- **Extremstellen** werden in der Ableitungsfunktion stets zu **Nullstellen**
- **Wendestellen** werden in der Ableitungsfunktion stets zu **Extremstellen**

<u>Vorgansweise:</u>



1. An **Extremstellen** orientieren -> Diese werden zu **Nullstellen** -> D.h. zuerst die Nullstellen im abgeleiteten Graph kennzeichnen. Es ergeben sich **mehrere Bereiche** – kennzeichnen!

2. Am **Verlauf** der ursprünglichen Funktion orientieren: **Wo steigt/fällt der Graph**?
Zur Erinnerung: Die erste Ableitung einer Funktion entspricht immer der Steigung des Graphen. Das heißt: $f'(x)$ gibt die Steigung von $f(x)$ an.

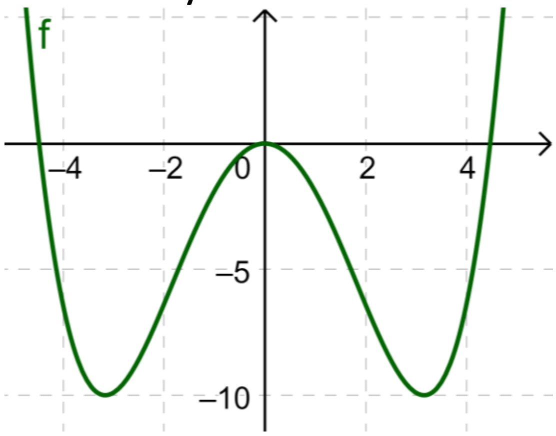
   ➔ Jeden einzelnen Bereich mit einem **+** (Der Graph steigt in diesem Bereich) oder **–** kennzeichnen (Der Graph fällt in diesem Bereich) -> Steigt der Graph in einem Bereich, so verläuft $f'(x)$ oberhalb der x-Achse. Je größer die Funktionswerte von $f'(x)$ sind, desto stärker steigt an dieser Stelle die Funktion $f(x)$.

3. Zum Schluss orientierst du dich an den Wendestellen von $f(x)$. Diese werden zu Extremstellen -> d.h. dort wo der Graph fällt (f'(x) ist unterhalb der x-Achse), entsteht ein Tiefpunkt von $f'(x)$. Umgekehrt ein Hochpunkt.
Jetzt musst du nur mehr den Verlauf der abgeleiteten Funktion skizzieren!

<u>Bemerkung 1:</u>
Es geht nicht darum, den Ableitungsgraph perfekt zu zeichnen, sondern nach diesen Vorgaben zu skizzieren.
<u>Bemerkung 2:</u>
Ein Wendepunkt wird zum Extrempunkt. Entscheide nach Gefühl, wie hoch/tief du diesen Punkt im Ableitungsgraph markierst. Möchtest du dies möglichst genau einzeichnen, so entspricht die y-Koordinate des Extrempunktes der Steigung der ursprünglichen Funktion an dieser Stelle.

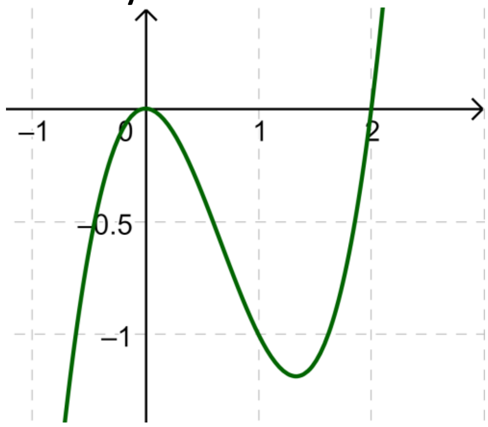
Bemerkung: Leitet man eine Polynomfunktion ab, so verringert sich der Grad um 1. Für das graphische Differenzieren ist es wichtig, dass du ein Vorstellungsvermögen hast, wie eine Polynomfunktion bis zum Grad 4 ausschauen kann. In den folgenden Abbildungen zeige ich dir typische Graphen.

Polynomfunktion 4. Grades



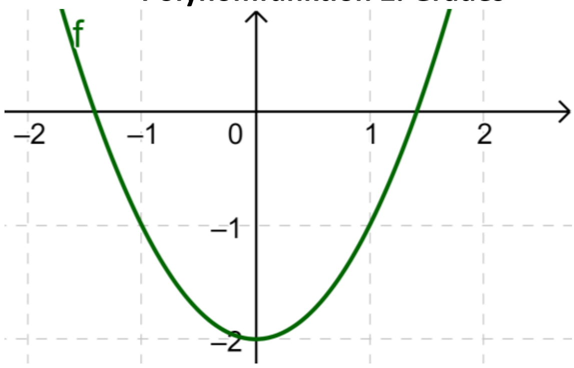
- Typische Merkmale:
  3 Extrempunkte & 2 Wendepunkte
- Darstellung kann variieren (z.B. ohne Wendepunkt -> nur 1 Extrempunkt)

Polynomfunktion 3. Grades



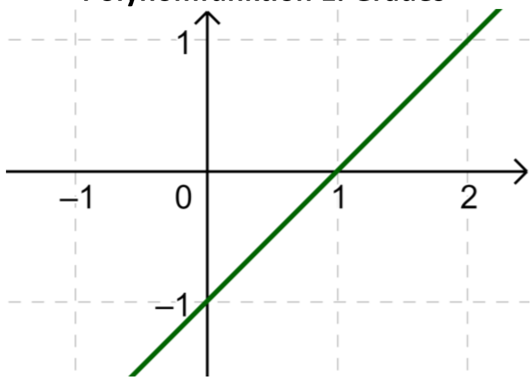
- Typische Merkmale:
  2 Extrempunkte & 1 Wendepunkt
- Darstellung kann variieren (z.B. ohne Extrempunkt)

Polynomfunktion 2. Grades



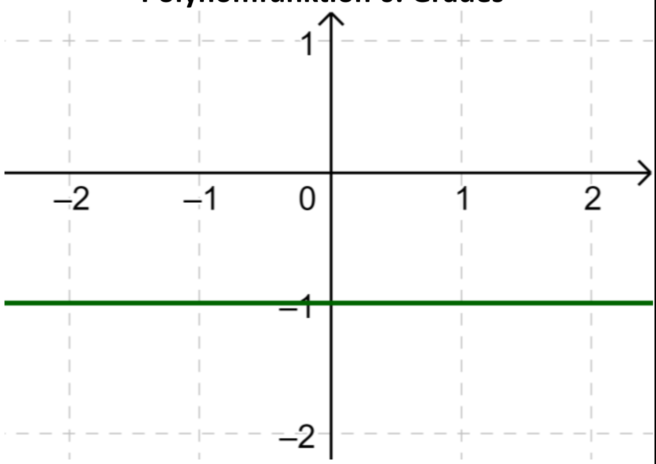
- Typische Merkmale:
  1 Extrempunkt, Kein Wendepunkt
- nach oben oder unten geöffnet
- Graph: Parabel

Polynomfunktion 1. Grades



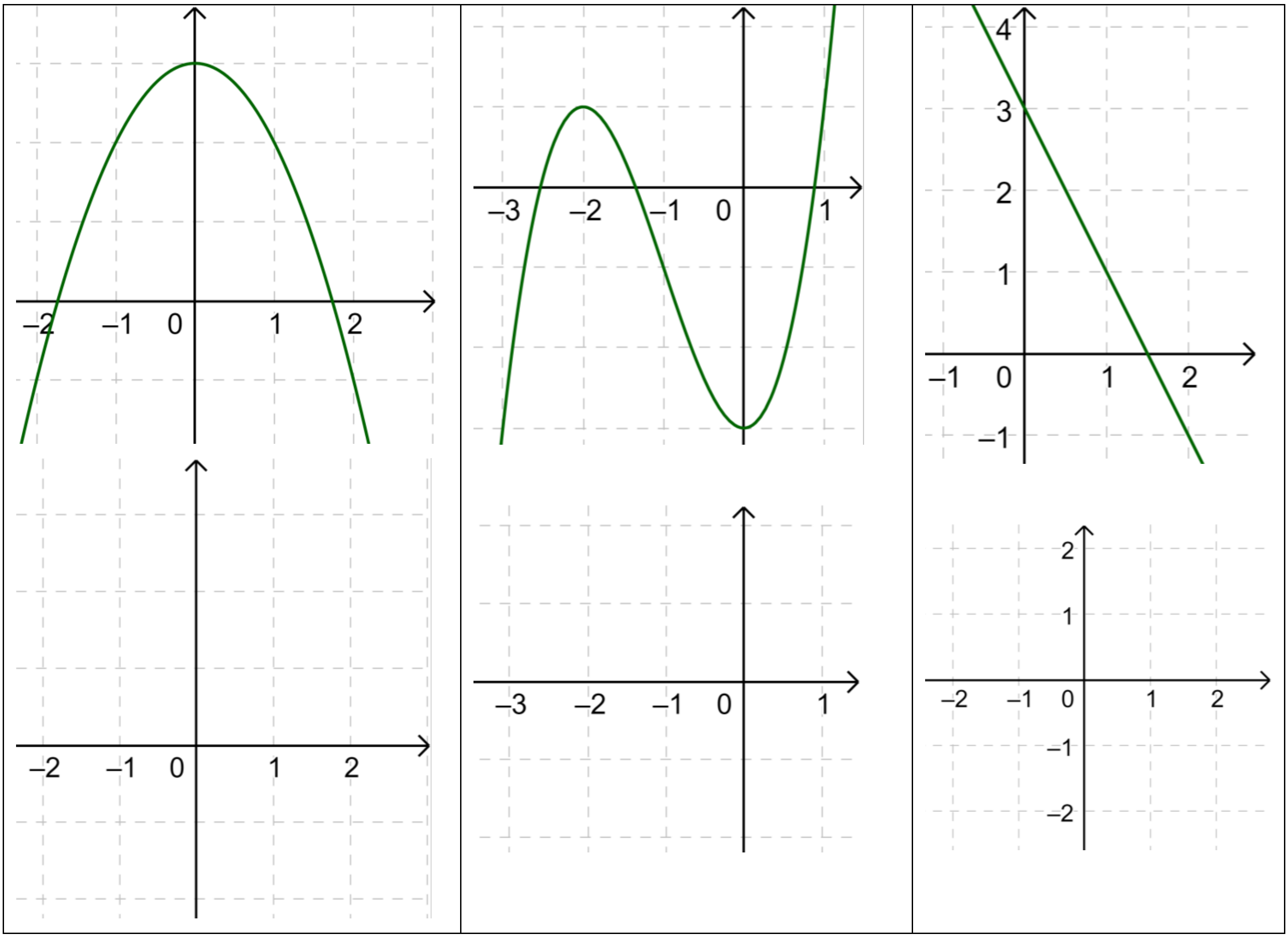
- Keine Extrempunkte oder Wendepunkte
- Graph: Gerade

Polynomfunktion 0. Grades

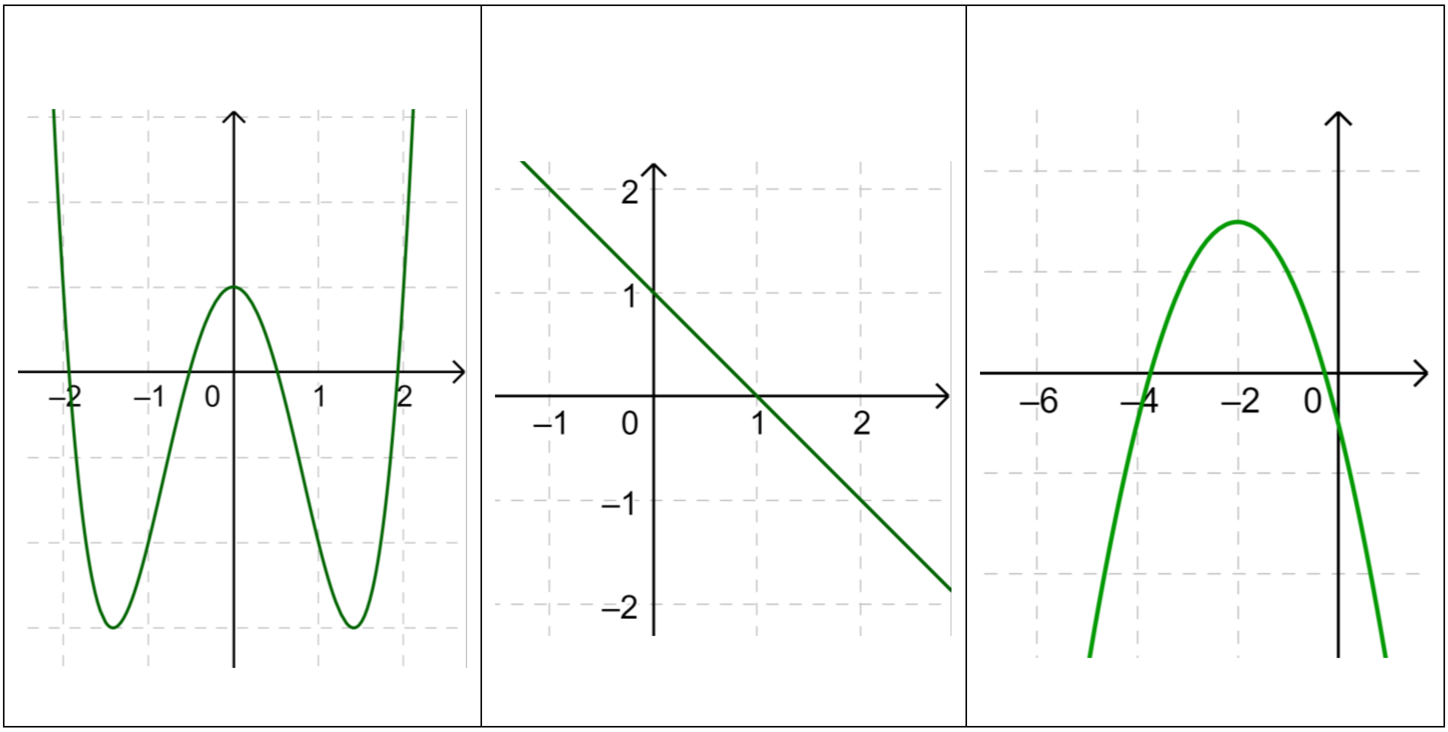


- Konstante Funktion

Bsp. 15) Leite die gegebene Funktion graphisch ab. Zeichne die Ableitungsfunktion im Graph darunter ein.

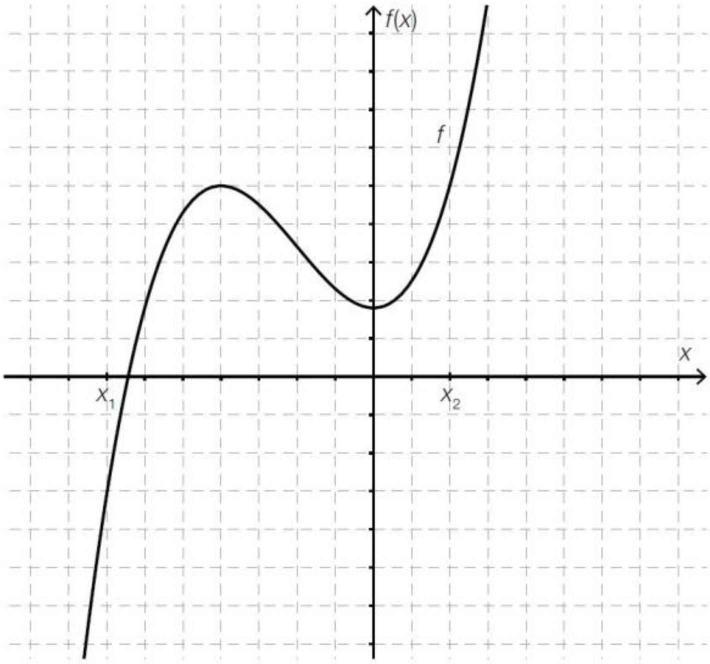


Bsp. 16) Leite die gegebene Funktion graphisch ab. Zeichne die Ableitungsfunktion im gleichen Graph ein.



Grafisch differenzieren* - 1_549, AN3.2, Konstruktionsformat

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades f.

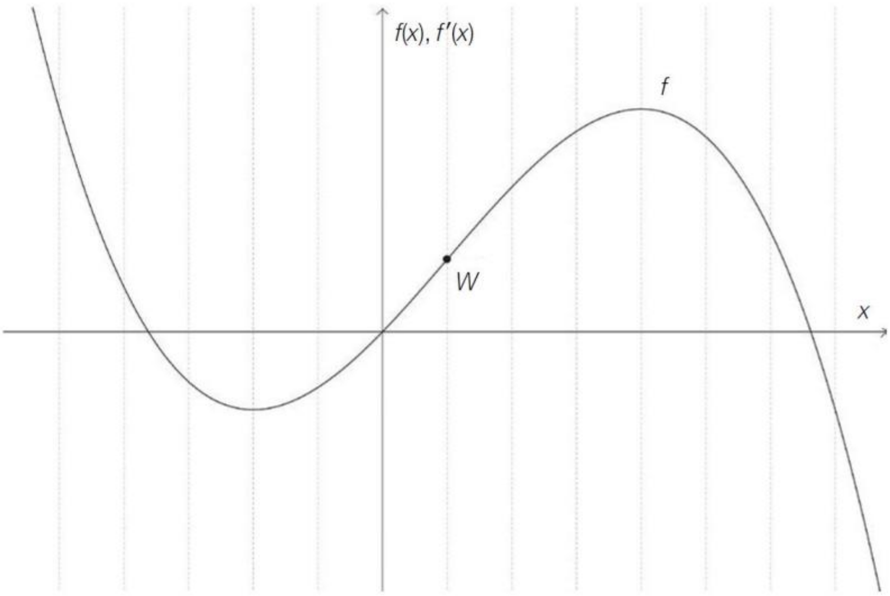


Skizzieren Sie in der gegebenen Grafik den Graphen der Ableitungsfunktion f' im Intervall $[x_1; x_2]$ und markieren Sie gegebenenfalls die Nullstellen!

Graph einer Ableitungsfunktion* - 1_383, AN3.2, Konstruktionsformat

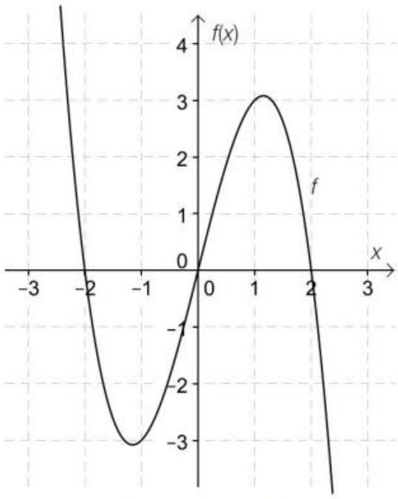
Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f dritten Grades, die den Wendepunkt W besitzt.

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in das Koordinatensystem!



Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion* - 1_406, AN3.2, Lückentext

In der folgenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion f dargestellt:



Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

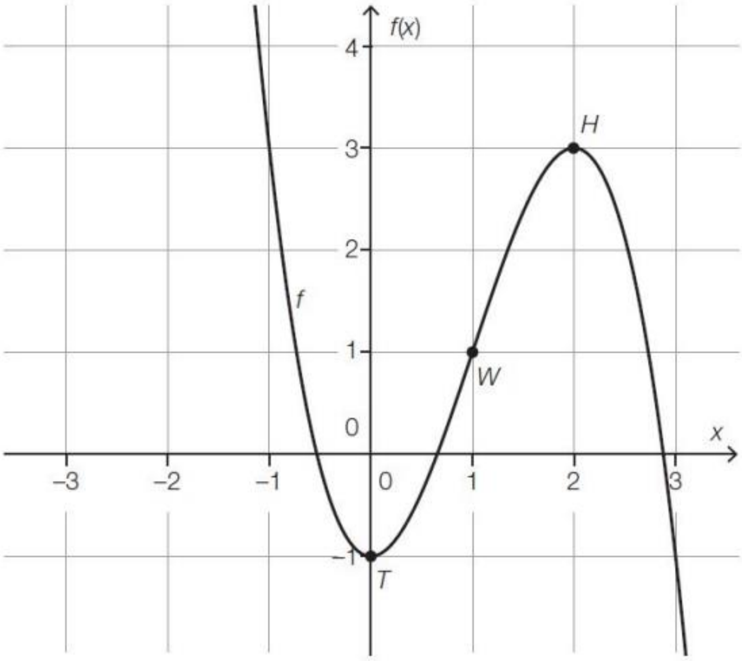
Die erste Ableitung der Funktion f ist _____①_____, und daraus folgt: _____②_____.

①	
im Intervall [−1; 1] negativ	☐
im Intervall [−1; 1] gleich null	☐
im Intervall [−1; 1] positiv	☐

②	
f hat im Intervall [−1; 1] eine Nullstelle	☐
f ist im Intervall [−1; 1] streng monoton steigend	☐
f hat im Intervall [−1; 1] eine Wendestelle	☐

Ableitungen* - 1_869, AN3.3, 2 aus 5

Gegeben ist der Graph der Polynomfunktion 3. Grades f. Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte (Tiefpunkt T, Wendepunkt W und Hochpunkt H) sind ganzzahlig.



Unten stehend sind verschiedene Aussagen zur 1. bzw. 2. Ableitung von f gegeben.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

$f'(0) > 0$	☐
$f''(0) > 0$	☐
$f'(1) > 0$	☐
$f'(2) > 0$	☐
$f''(2) > 0$	☐

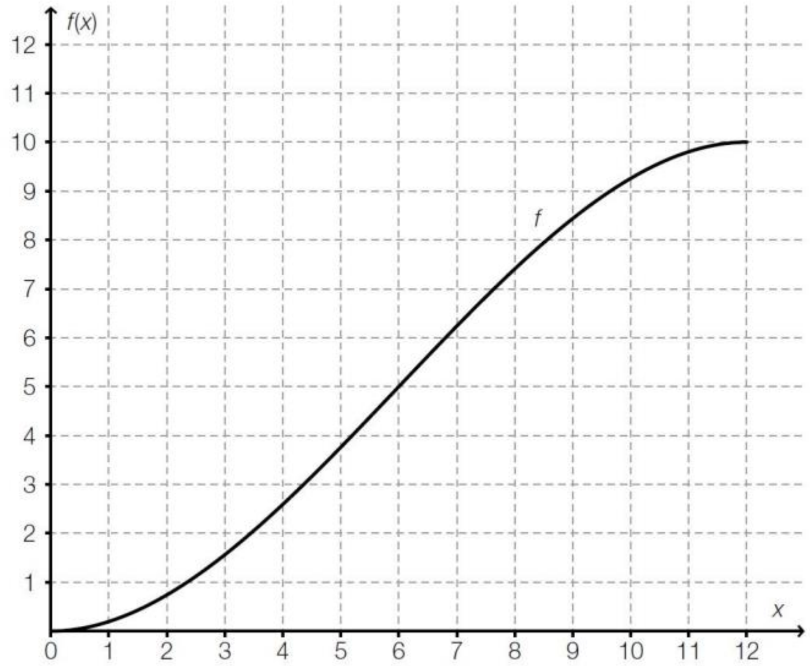
Extremstelle* - 1_357, AN3.3, 2 aus 5

Die Ermittlung lokaler Extremstellen einer Polynomfunktion f erfolgt häufig mithilfe der Differenzialrechnung.
Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die stets zutreffend sind!

Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann wechselt die Funktion an der Stelle x_0 das Krümmungsverhalten.	☐
Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann ist $f''(x_0) = 0$.	☐
Wenn die Funktion f bei x_0 das Monotonieverhalten ändert, dann liegt bei x_0 eine lokale Extremstelle von f.	☐
Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.	☐
Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann ist $f'(x)$ für $x < x_0$ immer negativ und für $x > x_0$ immer positiv.	☐

Differenzierbare Funktion* - 1_502, AN3.3, 2 aus 5

Die nachstehende Abbildung zeigt den Ausschnitt eines Graphen einer Polynomfunktion f.
Die Tangentensteigung an der Stelle $x = 6$ ist maximal.



Kreuzen Sie die beiden für die gegebene Funktion f zutreffenden Aussagen an!

$f''(6) = 0$	☐
$f''(11) < 0$	☐
$f''(2) < f''(10)$	☐
$f'(6) = 0$	☐
$f'(7) < f'(10)$	☐

Eigenschaften einer Polynomfunktion* - 1_750, AN3.3, Lückentext

Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass jedenfalls eine korrekte Aussage entsteht.

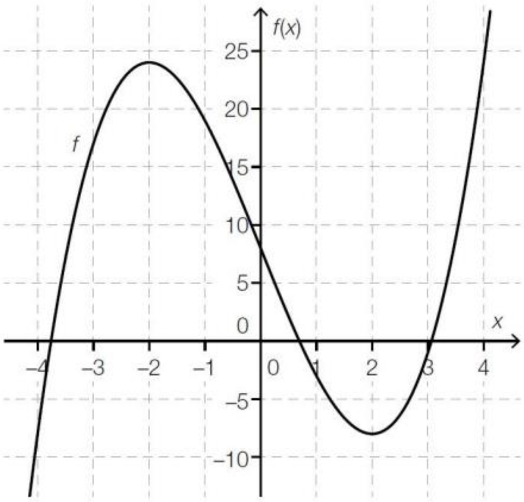
Wenn für alle $x \in (a; b)$ ___①___ gilt, dann ist die Funktion f im Intervall $(a; b)$ ___②___.

①	
$f(x) > 0$	☐
$f'(x) < 0$	☐
$f''(x) > 0$	☐

②	
streng monoton fallend	☐
rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt)	☐
streng monoton steigend	☐

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades* - 1_677, AN3.3, 2 aus 5

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades f. Die Stellen $x = -2$ und $x = 2$ sind Extremstellen von f.



Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$f'(0) = 0$	☐
$f''(1) > 0$	☐
$f'(-3) < 0$	☐
$f'(2) = 0$	☐
$f''(-2) > 0$	☐

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades* - 1_725, AN3.3, 2 aus 5

Gegeben ist eine Polynomfunktion f dritten Grades. An den beiden Stellen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ gelten folgende Bedingungen:

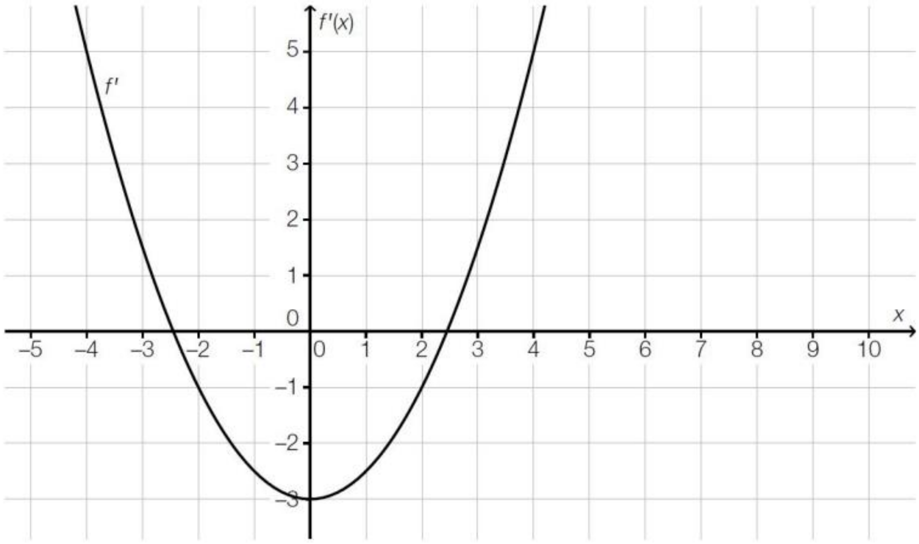
$f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) < 0$
$f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) > 0$

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die für die Funktion f auf jeden Fall zutreffen.

$f(x_1) > f(x_2)$	☐
Es gibt eine weitere Stelle x_3 mit $f'(x_3) = 0$.	☐
Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es eine Stelle x_3 mit $f(x_3) > f(x_1)$.	☐
Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es eine Stelle x_3 mit $f''(x_3) = 0$.	☐
Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es eine Stelle x_3 mit $f'(x_3) > 0$.	☐

Graph einer Ableitungsfunktion* - 1_430, AN3.3, 2 aus 5

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Die Funktion f' ist eine Polynomfunktion zweiten Grades.



Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Funktion f ist eine Polynomfunktion dritten Grades.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[0; 4]$ streng monoton steigend.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[-4; -3]$ streng monoton fallend.	☐
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[-4; 4]$ linksgekrümmt.	☐

Nachweis eines lokalen Minimums* - 1_478, AN3.3, Offenes Antwortformat

Gegeben ist eine Polynomfunktion p mit $p(x) = x^3 - 3 \cdot x + 2$. Die erste Ableitung p' mit $p'(x) = 3 \cdot x^2 - 3$ hat an der Stelle $x = 1$ den Wert null.
Zeigen Sie rechnerisch, dass p an dieser Stelle ein lokales Minimum (d. h. ihr Graph dort einen Tiefpunkt) hat!

Wendestelle* - 1_605, AN3.3, Offenes Antwortformat

Eine Polynomfunktion dritten Grades f hat die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = 12 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 8$.
Geben Sie an, ob die Funktion f an der Stelle $x = 6$ eine Wendestelle hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Monotonie- und Krümmungsverhalten* - 1_893, AN3.3, 2 aus 5

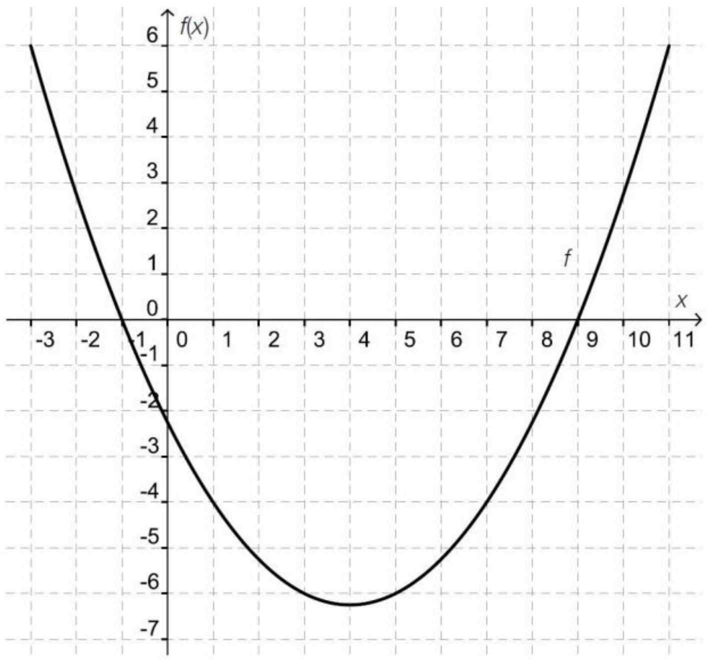
Gegeben sind eine Polynomfunktion f und zwei Stellen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$.
Für die 1. Ableitung f' von f gilt:
$f'(x_1) < 0$ und $f'(x_2) > 0$

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf jeden Fall zutreffen. *[2 aus 5]*

Im Intervall $(x_1; x_2)$ gibt es mindestens eine Stelle x_0, für die $f'(x_0) = 0$ gilt.	☐
Die Funktion f hat im Intervall $(x_1; x_2)$ eine lokale Maximumstelle.	☐
Die Funktion f hat im Intervall $(x_1; x_2)$ eine Wendestelle.	☐
Im Intervall $(x_1; x_2)$ schneidet der Graph von f mindestens einmal die x-Achse.	☐
Im Intervall $(x_1; x_2)$ ändert sich das Monotonieverhalten von f.	☐

Negative erste Ableitung* - 1_382, AN3.3, Halboffenes Antwortformat

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion f im Intervall $[-3; 11]$ dargestellt. An der Stelle $x = 4$ hat die Funktion ein lokales Minimum.



Geben Sie das Intervall I für diejenigen Stellen $x \in [-3; 11]$ an, für die gilt: $f'(x) < 0$!

I = ______________________________

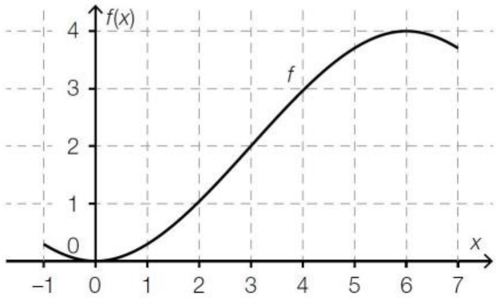
Steigung einer Funktion - 1_036, AN3.3, Offenes Antwortformat

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + 5$.

Berechnen Sie den Wert der Steigung der Funktion f an der Stelle $x = 2$!

Polynomfunktion* - 1_702, AN3.3, 2 aus 5

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad 3 im Intervall $[-1; 7]$ dargestellt. Alle lokalen Extremstellen sowie die Wendestelle von f im Intervall $[-1; 7]$ sind ganzzahlig und können aus der Abbildung abgelesen werden.



Kreuzen Sie die beiden auf die Funktion f zutreffenden Aussagen an!

$f''(3) = 0$	☐
$f'(1) > f'(3)$	☐
$f''(1) = f''(5)$	☐
$f''(1) > f''(4)$	☐
$f'(3) = 0$	☐

Zeit-Weg-Funktion* - 1_582, AN3.3, 2 aus 5

Die geradlinige Bewegung eines Autos wird mithilfe der Zeit-Weg-Funktion s beschrieben. Innerhalb des Beobachtungszeitraums ist die Funktion s streng monoton wachsend und rechtsgekrümmt.
Kreuzen Sie die beiden für diesen Beobachtungszeitraum zutreffenden Aussagen an!

Die Geschwindigkeit des Autos wird immer größer.	☐
Die Funktionswerte von s' sind negativ.	☐
Die Funktionswerte von s'' sind negativ.	☐
Der Wert des Differenzenquotienten von s im Beobachtungszeitraum ist negativ.	☐
Der Wert des Differenzialquotienten von s wird immer kleiner.	☐

4. Das unbestimmte Integral – Stammfunktion

Video

Die **Umkehroperation** zur **Differentialrechnung** nennt man **Integralrechnung**. Mit Hilfe von Ableitungsregeln konnten wir zu einer Funktion f die Ableitungsfunktion f' bestimmen. In weiterer Folge ist nun das Ziel, von einer Ableitungsfunktion die zugehörige Ausgangsfunktion zu finden.

Definition (Stammfunktion):

Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** der Funktion f, wenn für alle x aus derselben Definitionsmenge gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Musterbeispiel: Sei $f(x) = 4x$. Dann gibt es unendlich viele Stammfunktionen, weil:

$$F_1(x) = 2x^2 \quad \rightarrow \quad weil\ F_1'(x) = 4x$$
$$F_2(x) = 2x^2 + 3 \quad \rightarrow \quad weil\ F_2'(x) = 4x$$
$$F_3(x) = 2x^2 - 1000 \quad \rightarrow \quad weil\ F_3'(x) = 4x$$

Die Funktionen $F_1, F_2\ und\ F_3$ sind Stammfunktionen von $f(x) = 4x$, da die **konstanten Zahlen** durch das **Ableiten wegfallen**.

Allgemein geben wir die Stammfunktion mit einer Integrationskonstante c an (Bemerkung: eine konstante Zahl fällt beim Ableiten weg)

$$f(x) = 4x \quad \rightarrow \quad F(x) = 2x^2 + c \quad mit\ c \in \mathbb{R}.$$

Integrationskonstante c:

Die Integrationskonstante c ist der **unbekannte konstante Term** ($c \in \mathbb{R}$) der Stammfunktion, der durch das **Ableiten wegfällt**. Deswegen ist die Integration keine exakte Umkehrung zur Ableitung einer Funktion, da die Integrationskonstante c ohne weitere Information nicht bestimmt werden kann.

Folge: Es gibt unendlich viele Stammfunktionen zu einer Funktion f(x), da die Integrationskonstante c alle reellen Zahlen annehmen kann.

Definition (Unbestimmtes Integral):

Die Bestimmung von Stammfunktionen nennt man unbestimmtes Integrieren. Dazu führt man eine neue Schreibweise mit Hilfe des Integralzeichens $\int$ ein.

Es gilt:

Stammfunktion

$$\int f(x)\, dx = F(x) + $$

Integrationskonstante c

Integrand vorkommende Funktion

Integrationsvariable

Den Ausdruck d**x** bezeichnet man als Differential. Dieser zeigt, nach welcher Variable integriert werden soll.

Integrationsregeln:

Konstante Zahl $f(x) = k$ mit $k \in \mathbb{R}$	$\int k \; dx = k \cdot x + c$	$f(x) = 4 \;\rightarrow\; F(x) = 4x + c$
Potenzregel $f(x) = x^n$ mit $n \neq -1$	$\int x^n \; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	Exponent um 1 erhöhen und durch den neuen Exponenten dividieren. Die Potenzregel gilt für alle Potenzen mit $n \neq -1$.
	$f(x) = x^2 \;\rightarrow\; F(x) = \frac{x^3}{3} + c$	$f(x) = x^6 \rightarrow F(x) = \frac{x^7}{7} + c$
Faktorregel	$\int c \cdot f(x) \; dx = c \cdot \int f(x) \; dx$	Ein konstanter Faktor kann herausgehoben werden.
	$f(x) = 4x^2 \;\rightarrow\; F(x) = 4 \cdot \frac{x^3}{3} + c$	
Summenregel	$\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \; dx \pm \int g(x) \; dx$	Bei einer Summe werden die Summanden einzeln integriert. (analog Differenz)
	$f(x) = 5x^2 - 3x + 3 \;\rightarrow\; F(x) = 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + c$	

Video

Bsp. 17) Berechne eine Stammfunktion von f. Überprüfe durch Differenzieren.

a. $f(x) = 3x + 2$	**b.** $f(x) = 4x^2 - 3x$	**c.** $f(x) = 6x^5 - 3x^2$
d. $f(x) = x^{-4}$	**e.** $f(x) = -3x + 2$	**f.** $f(x) = 4x^{-2} - 2x$

Bsp. 18) Gegeben sind eine Polynomfunktion f und eine ihrer möglichen Stammfunktionen F. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

Eine Funktion f hat unendlich viele Stammfunktionen, die sich nur durch eine additive Integrationskonstante unterscheiden.	O
Wenn man die Funktion F integriert, erhält man die Funktion f.	O
Eine Funktion F heißt Stammfunktion der Funktion f, wenn gilt: $f(x) = F(x) + c$	O
Es gilt: $f(x) = F'(x)$	O
Wenn man die Funktion f differenziert, erhält man die Funktion F.	O

Musterbeispiel: Bestimme jene Stammfunktion von f, für die die gegebene Bedingung gilt. $f(x) = 2x + 3 \;\; \& \;\; F(3) = 23$	$F(x) = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + c$ $= x^2 + 3x + c$ **Gesucht:** Parameter c **Wir wissen:** $F(3) = 23$	$3^2 + 3 \cdot 3 + c = 23$ $9 + 9 + c = 23 \;\; \vert -18$ $c = 5$ $\mathbf{F(x) = x^2 + 3x + 5}$

Bsp. 19) Bestimme jene Stammfunktion von f, für die die gegebene Bedingung gilt.

a. $f(x) = 4 \;\; \& \;\; F(-2) = -5$	**b.** $f(x) = 2x \;\; \& \;\; F(3) = 2$	**c.** $f(x) = x^2 - 4 \;\; \& \;\; F(6) = 49$
d. $f(x) = x^4 - e^x \;\; \& \; F(0) = -5$	**e.** $f(x) = -6x^5 \;\; \& \;\; F(-1) = -101$	**f.** $4x^2 - 3x \;\; \& \;\; F(6) = 245$

Ableitungs- und Stammfunktion* - 1_527, AN3.1, 2 aus 5

Video

Es sei f eine Polynomfunktion und F eine ihrer Stammfunktionen.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Eine Funktion F heißt Stammfunktion der Funktion f, wenn gilt: $f(x) = F(x) + c \; (c \in \mathbb{R})$.	☐
Eine Funktion f' heißt Ableitungsfunktion von f, wenn gilt: $\int f(x)\mathrm{d}x = f'(x)$.	☐
Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 definiert ist, gibt $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f an dieser Stelle an.	☐
Die Funktion f hat unendlich viele Stammfunktionen, die sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden.	☐
Wenn man die Stammfunktion F einmal integriert, dann erhält man die Funktion f.	☐

Ableitungsfunktion und Stammfunktion* - 1_723, AN3.1, 2 aus 5

Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion.
Zwei der folgenden Aussagen über die Funktion f treffen auf jeden Fall zu.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Die Funktion f hat genau eine Stammfunktion F.	☐
Die Funktion f hat genau eine Ableitungsfunktion f'.	☐
Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $f' = F$.	☐
Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $F'' = f'$.	☐
Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $\int_0^1 F(x)\,dx = f(1) - f(0)$.	☐

Beziehungen zwischen Funktion Ableitungs- und Stammfunktion* - 1_629, AN3.1, Lückentext

Es sei f eine Polynomfunktion dritten Grades, f' ihre Ableitungsfunktion und F eine der Stammfunktionen von f.
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die zweite Ableitungsfunktion der Funktion ____①____ ist die Funktion ____②____.

①	
f	☐
f'	☐
F	☐

②	
f	☐
f'	☐
F	☐

Stammfunktion* - 1_701, AN3.1, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^3$ mit $a \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie a so, dass die Funktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = 5 \cdot x^4 - 2$ eine Stammfunktion von f ist!

$a =$ ________________________

Stammfunktion* - 1_797, AN3.1, Offenes Antwortformat

Gegeben ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$.
Die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x)$ ist eine Stammfunktion von f.
Für eine Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto h(x)$ und $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt: $h(x) = g(x) + c$.

Geben Sie an, ob h ebenfalls eine Stammfunktion von f ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Stammfunktionen* - 1_821, AN3.1, 2 aus 5

Gegeben ist eine Stammfunktion F einer Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Zwei der nachstehenden Funktionen G_1 bis G_5 sind für alle $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ jedenfalls auch Stammfunktionen von f.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Funktionen an.

$G_1 = c \cdot F$	☐
$G_2 = c + F$	☐
$G_3 = F - c$	☐
$G_4 = c - F$	☐
$G_5 = \frac{F}{c}$	☐

Zusammenhang zwischen Funktion und Stammfunktionen* - 1_676, AN3.1, 2 aus 5

Die Funktionen g und h sind unterschiedliche Stammfunktionen einer Polynomfunktion f vom Grad $n \geq 1$.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$g'(x) = h'(x)$	☐
$g(x) + h(x) = c,\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	☐
$\int_0^2 g(x)\,dx = f(2) - f(0)$	☐
$\int_0^2 f(x)\,dx = h(2) - h(0)$	☐
$g(x) = c \cdot h(x),\ c \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$	☐

5. Graphisches Integrieren einer Polynomfunktion

Erinnerung: Die Funktionswerte $f(x)$ geben die Steigung der Stammfunktion $F(x)$ an der Stelle x an.

➔ Folge: Verläuft $f(x)$ oberhalb der x-Achse (positive Funktionswerte), so ist die Stammfunktion $F(x)$ an diesen Stellen steigend. Mit diesen Überlegungen und der NEW-Regel kann eine Funktion graphisch integriert werden:

Grundregel:

$F(x)$: N E W

↑ ↑

$f(x)$: N E W

- **Nullstellen** werden in der Stammfunktion stets zu **Extremstellen**
- **Extremstellen** werden in der Stammfunktion stets zu **Wendestellen**
- **Wendestellen** haben **keine Bedeutung** für den Graphen der Stammfunktion

Video

Zusammenhänge – Funktion / Stammfunktion

$$f(x) = F'(x)$$
$$f'(x) = F''(x)$$

$F(x)$: N E W

$f(x)$: N E W

Ist z.B. $f'(x) > 0$ (f steigend), so ist auch $F''(x) > 0$ (F linksgekrümmt)

	Funktion f	**Stammfunktion F**
$f(x) = 0 \iff F'(x) = 0$	f besitzt eine Nullstelle an der Stelle x	F besitzt eine lokale Extremstelle oder Sattelstelle an der Stelle x
$f'(x) = 0\ \&\ f''(x) \neq 0$ $\iff F''(x) = 0\ \&\ F'''(x) \neq 0$	f besitzt eine lokale Extremstelle an der Stelle x	F besitzt eine Wendestelle an der Stelle x
$f(x) > 0 \iff F'(x) > 0$	f besitzt einen positiven Funktionswert an der Stelle x	F ist steigend an der Stelle x.
$f(x) < 0 \iff F'(x) < 0$	f besitzt einen negativen Funktionswert an der Stelle x	F ist fallend an der Stelle x.
$f'(x) > 0 \iff F''(x) > 0$	f ist streng monoton steigend an der Stelle x.	F ist linksgekrümmt an der Stelle x.
$f'(x) < 0 \iff F''(x) < 0$	f ist streng monoton fallend an der Stelle x.	F ist rechtsgekrümmt an der Stelle x.

Vorgansweise:

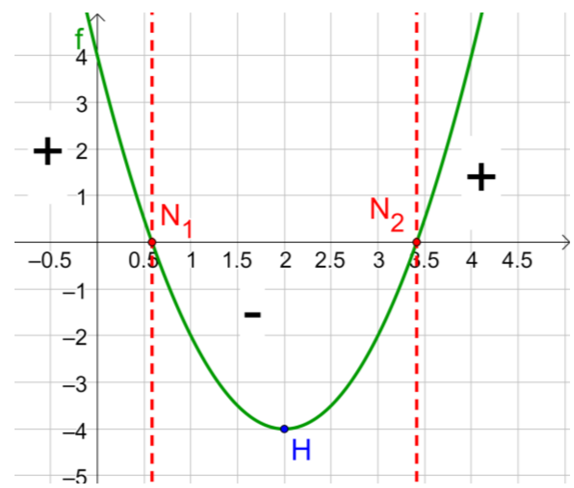
Schritt 1:

An **Nullstellen** orientieren -> Diese werden zu **Extremstellen**

Es entstehen **Bereiche (im Beispiel: 3 Bereiche)**

- Verläuft die Funktion **oberhalb** der **x-Achse**, ist die Stammfunktion steigend (+).
- Verläuft die Funktion **unterhalb** der **x-Achse**, ist die Stammfunktion fallend (-).

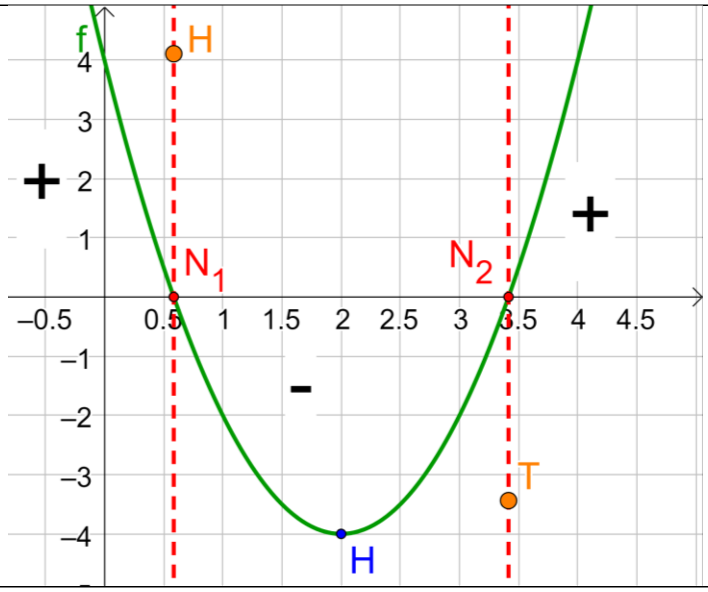
Die Bereiche mit + bzw. – kennzeichnen.



Schritt 2:
Überlege dir nun, um welche Extremstelle (Sonderfall: Sattelstelle) es sich handelt.
3 Fälle:

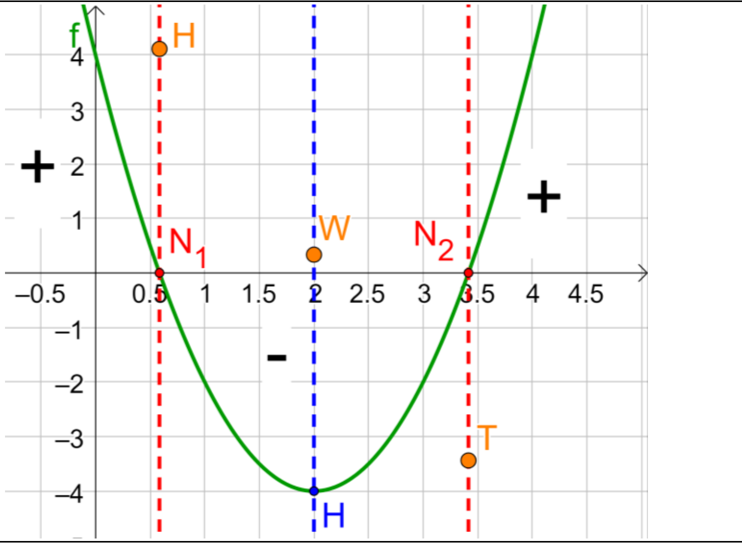
- zuerst steigend, dann fallend -> Hochpunkt
- zuerst fallend, dann steigend -> Tiefpunkt
- zuerst fallend, dann fallend -> Sattelpunkt
  zuerst steigend, dann steigend -> Sattelpunkt

Die Extrempunkte müssen nach Gefühl markiert werden. Wir können nicht wissen, ob die integrierte Funktion Nullstellen hat, da wir nur Informationen in Bezug auf die Steigung haben. **Bemerkung:** Entspricht die erste Nullstelle einem Hochpunkt & die zweite Nullstelle einem Tiefpunkt, so muss der Hochpunkt höher eingezeichnet werden als der Tiefpunkt.



Schritt 3:
Die Extremstellen werden zu Wendestellen.

Die Wendepunkte müssen passend eingezeichnet werden und liegen stets zwischen zwei Extrempunkten (von der Höhe).



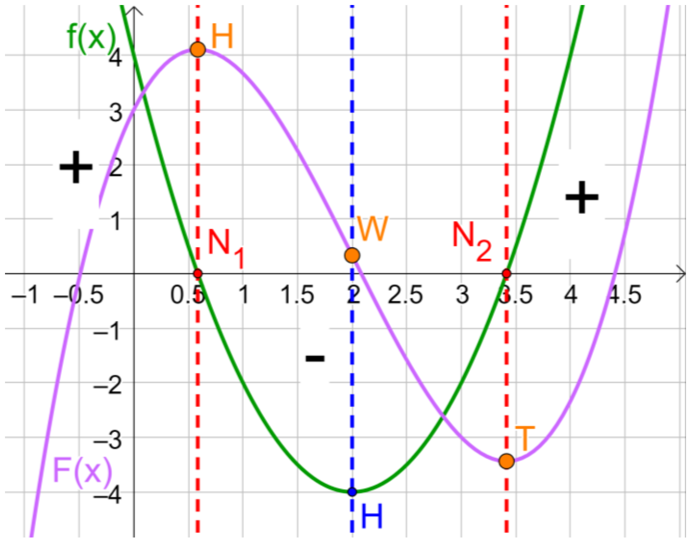
Schritt 4:

Den Funktionsgraph der Stammfunktion skizzieren.

Erinnerung: Wenn man integriert, wird der Grad der Polynomfunktion um 1 erhöht.

1. Grad -> 2. Grad
2. Grad -> 3. Grad
3. Grad -> 4. Grad

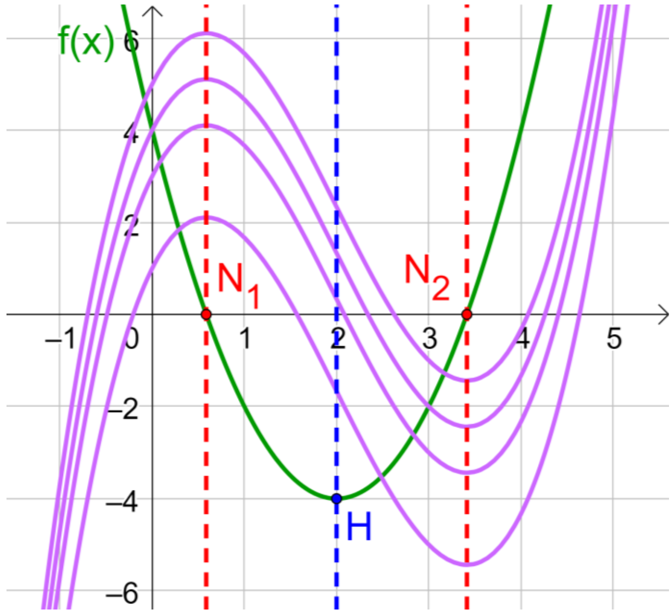
Denke daran, wie Polynomfunktionen des jeweiligen Typs ausschauen und versuche mit diesem Wissen den Funktionsgraph bestmöglich skizzieren.



Bemerkung: Es gilt:

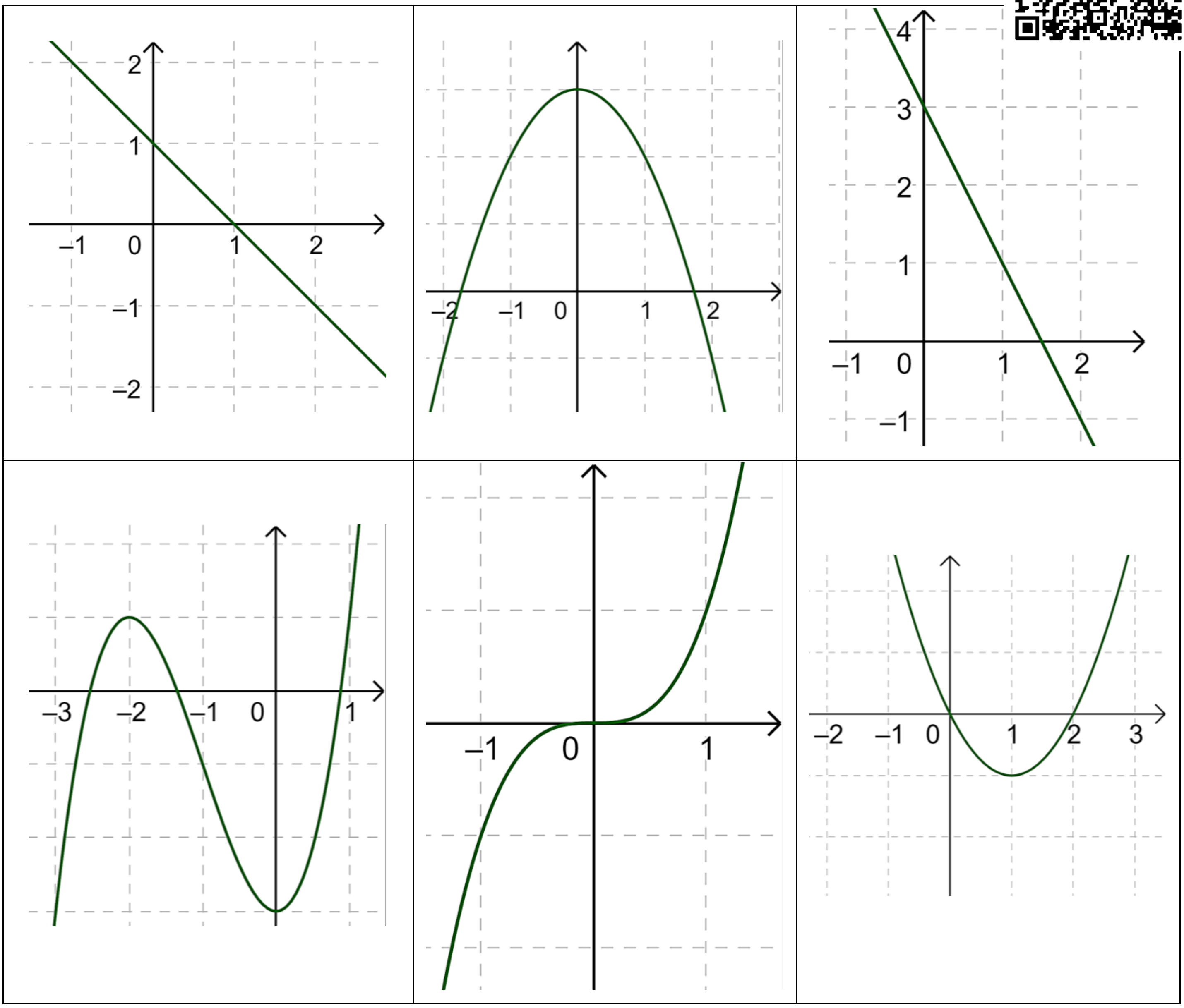
$$\int f(x)\ dx = F(x) + \boldsymbol{c}$$

Durch eine Verschiebung des Funktionsgraphen entlang der y-Achse gibt es unendlich viele, verschiedene Graphen einer Stammfunktion von $f(x)$.



[Video](#)

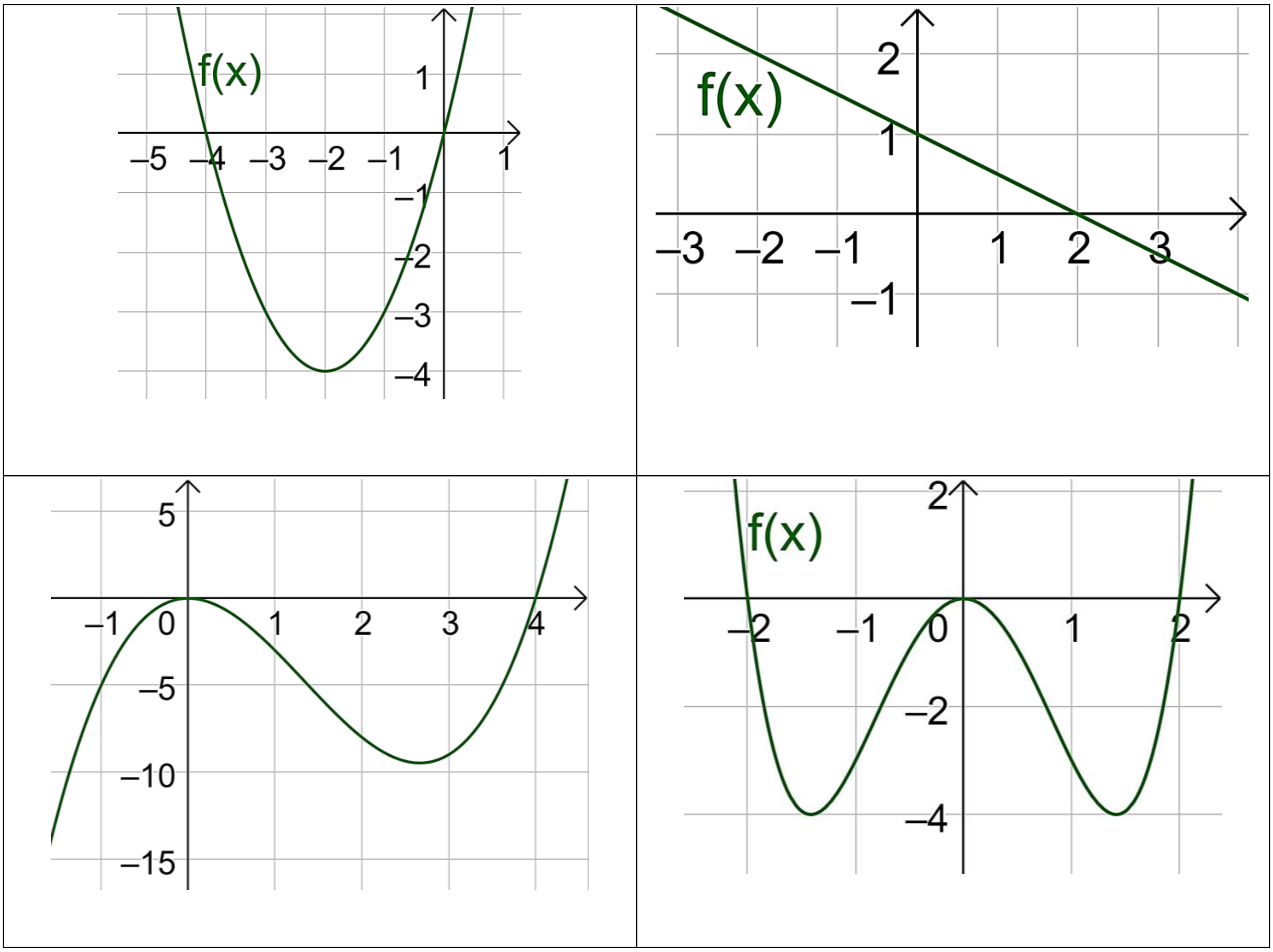
Bsp. 20) Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f. Zeichne einen möglichen Graphen einer Stammfunktion von f im Koordinatensystem ein.



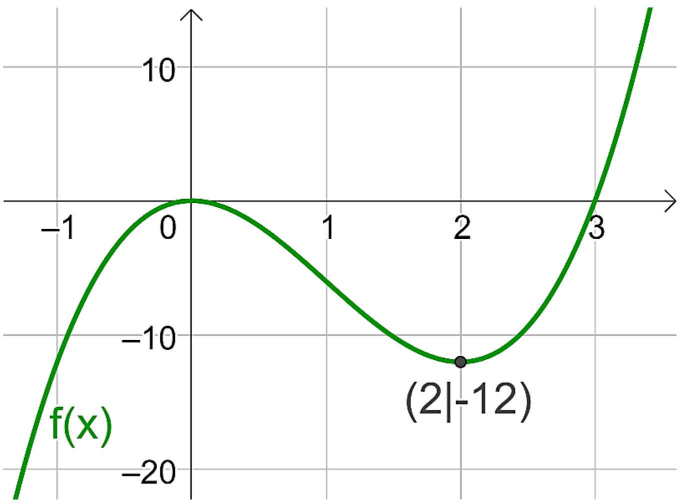
Bsp. 21) Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion $f(x)$.

a. Gib das **Monotonieverhalten** der Stammfunktion $F(x)$ an.
b. Gib **lokale Extremstellen (inkl. Art)** der Stammfunktion F(x) an.
c. Gib das **Krümmungsverhalten** der Stammfunktion $F(x)$ an.

Video

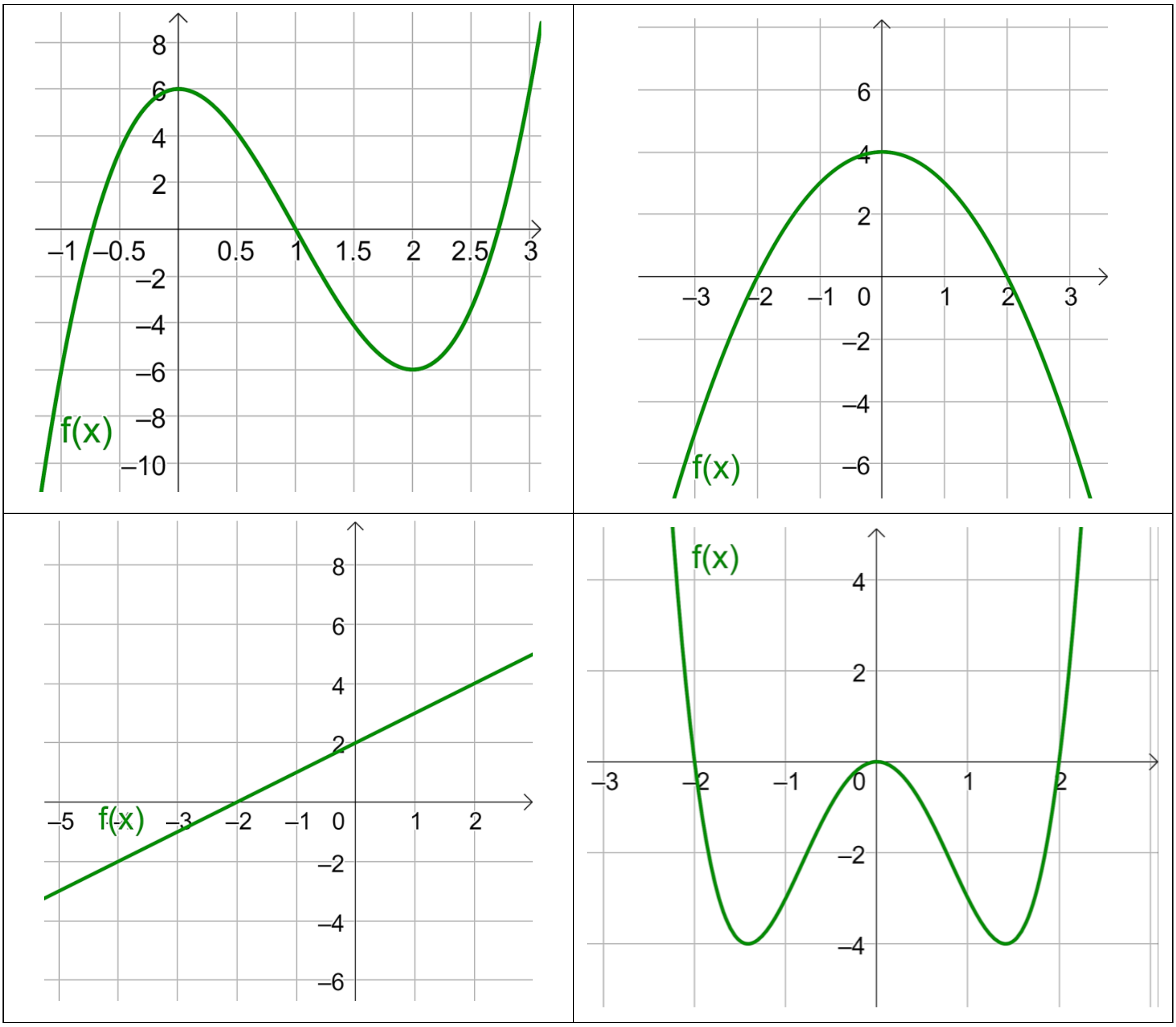


Bsp. 22) Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f dritten Grades. Welche beiden Aussagen treffen auf die Ableitungsfunktion f' bzw. auf eine der möglichen Stammfunktionen F mit Sicherheit zu?



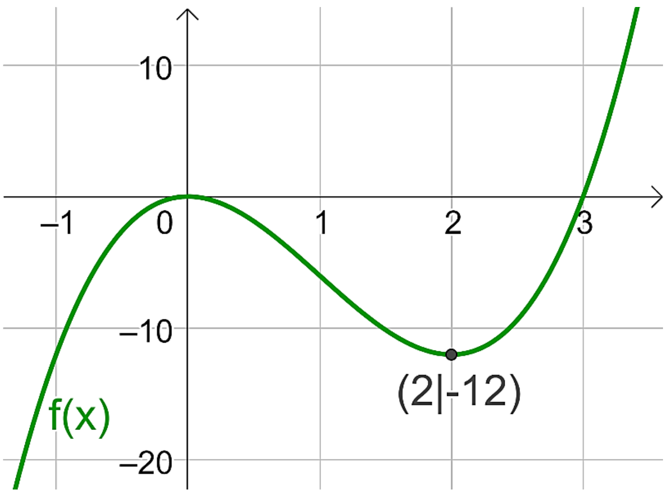
Die Funktionswerte der Funktion f' sind im Intervall $(0; 2)$ negativ.	O
Die Stammfunktion F ist im Intervall $(2; 3)$ rechtsgekrümmt.	O
Die Stammfunktion F besitzt an der Stelle $x = 3$ eine lokale Minimumstelle.	O
Die Stammfunktion F besitzt an der Stelle $x = 3$ eine Sattelstelle.	O
Die Ableitungsfunktion f' besitzt an der Stelle $x = 3$ eine lokale Minimumstelle.	O

Bsp. 23) Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f. Skizziere einen möglichen Graphen der Ableitungsfunktion f‘ sowie der Stammfunktion F.



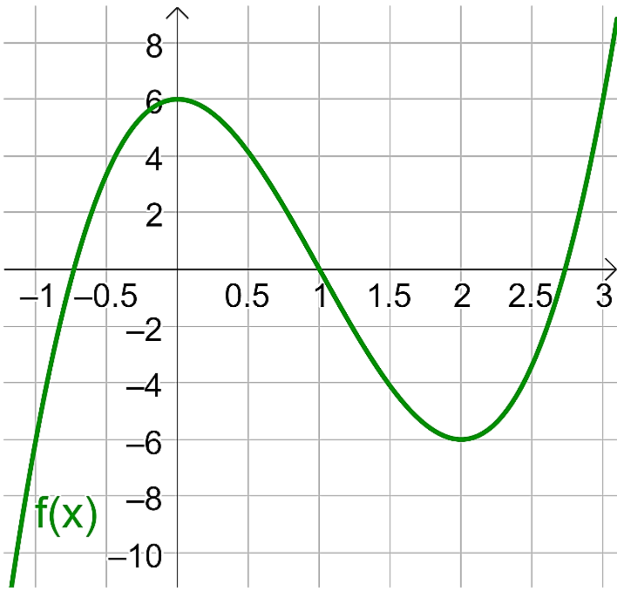
Bsp. 24) Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen zu den Ableitungsfunktion f‘ bzw. f‘‘, sowie einer möglichen Stammfunktion F an.

Video



$f''(0) > 0$	O
$F''(0) = 0$	O
$f'(2) < 0$	O
$F'(2) < 0$	O
$F'''(3) < 0$	O

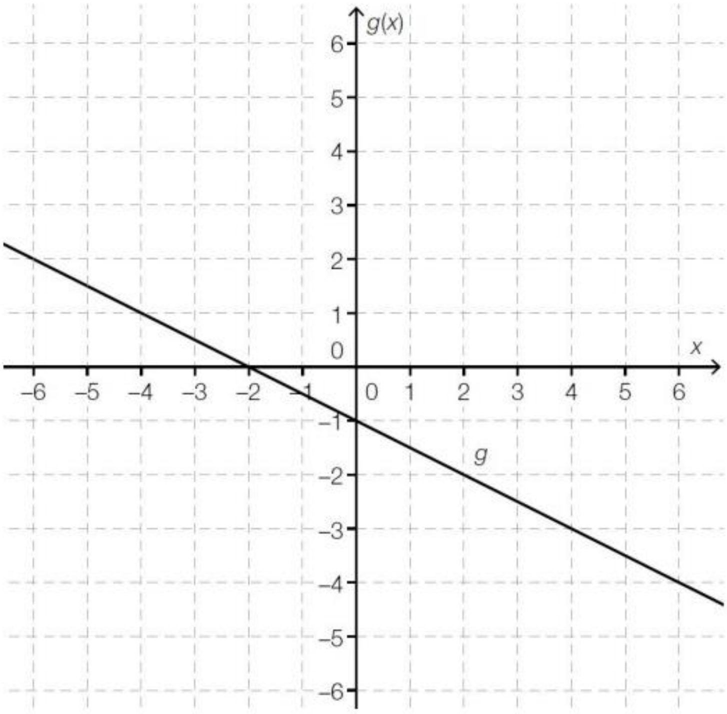
Bsp. 25) Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades. Von dieser Polynomfunktion existieren die beiden Ableitungsfunktionen f‘ und f‘‘ sowie eine mögliche Stammfunktion F. Ordne zu, ob du zum gegebenen Ausdruck den genauen Wert kennst oder ihn zumindest einschränken kannst ($< 0, = 0, > 0$).



f(3)	f(0)
$F(1) - F(0)$	$F(2) - F(1)$
$f''(1)$	$f''(2)$
$f'(1)$	$F'(-1)$
$f(1{,}5)$	$f(-1)$
$F'(0{,}5)$	$F''(-1)$
$F'''(2)$	$F'''(-1)$
$F''(0)$	$F''(3)$
$f''(2{,}5)$	$f'(2)$
$F'(1)$	$f'(-0{,}5)$

Eigenschaften von Stammfunktionen* - 1_652, AN3.2, 2 aus 5

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer linearen Funktion g dargestellt.

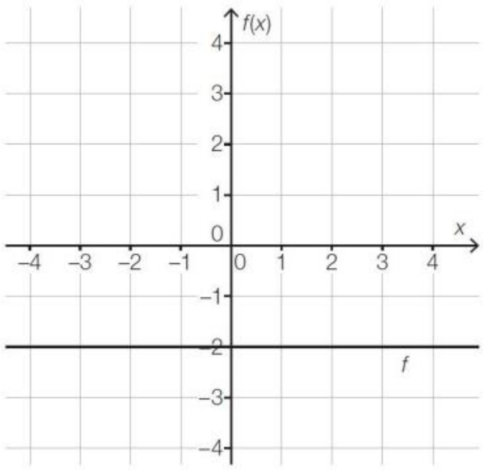


Kreuzen Sie die beiden für die Funktion g zutreffenden Aussagen an!

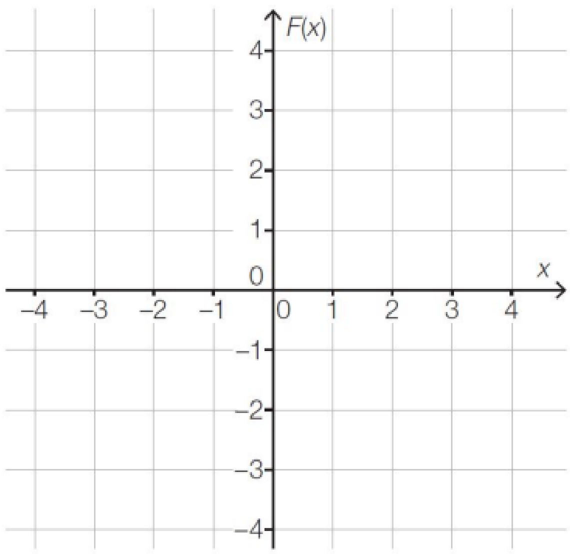
Jede Stammfunktion von g ist eine Polynomfunktion zweiten Grades.	☐
Jede Stammfunktion von g hat an der Stelle $x = -2$ ein lokales Minimum.	☐
Jede Stammfunktion von g ist im Intervall $(0; 2)$ streng monoton fallend.	☐
Die Funktion G mit $G(x) = -0{,}5$ ist eine Stammfunktion von g.	☐
Jede Stammfunktion von g hat mindestens eine Nullstelle.	☐

Stammfunktion einer konstanten Funktion* - 1_431, AN3.2, Konstruktionsformat

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer konstanten Funktion f dargestellt.

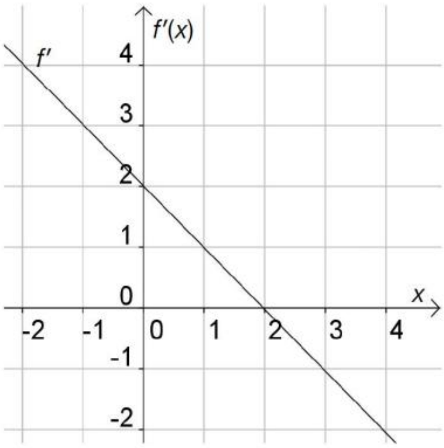


Der Graph einer Stammfunktion F von f verläuft durch den Punkt $P = (1|1)$.
Zeichnen Sie den Graphen der Stammfunktion F im nachstehenden Koordinatensystem ein!



Eigenschaften einer Funktion* - 1_334, AN3.3, 2 aus 5

Von einer reellen Polynomfunktion f sind der Graph und die Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion f' gegeben: $f'(x) = -x + 2$.

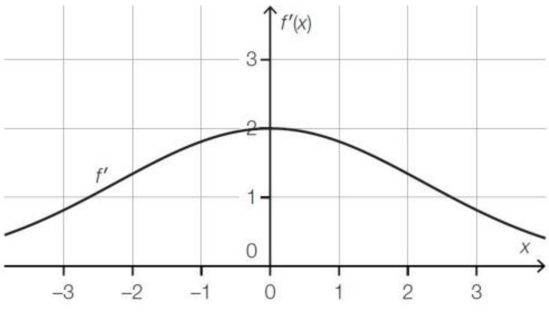


Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Stelle $x_1 = 0$ ist eine Wendestelle von f.	☐
Im Intervall [0; 1] ist f streng monoton fallend.	☐
Die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(0 \mid f(0))$ hat die Steigung 2.	☐
Die Stelle $x_2 = 2$ ist eine lokale Maximumstelle von f.	☐
Der Graph der Funktion f weist im Intervall [2; 3] eine Linkskrümmung (positive Krümmung) auf.	☐

Funktionseigenschaften* - 1_846, AN3.3, 2 aus 5

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der 1. Ableitungsfunktion f' einer Polynomfunktion f dargestellt.



Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf die Funktion f auf jeden Fall zutreffen. *[2 aus 5]*

Im Intervall [–3; 3] ist die Funktion f streng monoton steigend.	☐
Der Graph von f ist im Intervall [–3; 3] symmetrisch zur senkrechten Achse.	☐
Die Funktion f hat im Intervall [–3; 3] mindestens eine Wendestelle.	☐
Im Intervall [–3; 3] sind alle Funktionswerte von f positiv.	☐
Die Funktion f hat im Intervall [–3; 3] mindestens eine lokale Extremstelle.	☐