AN2 Regeln für das Differenzieren

Maturaskript AHS (5 Seiten)

Grundkompetenz:

- **AN2.1** einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für [k · f(x)]′ und [f(k · x)]′ (vgl. Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten)

<table>
<tr><th>Regel</th><th>$f(x)$</th><th>$f'(x)$</th><th>Bemerkung</th></tr>
<tr><td>Potenzregel</td><td>x^n</td><td>$n \cdot x^{n-1}$</td><td>Der Exponent kommt herunter. Die Hochzahl wird um 1 vermindert.</td></tr>
<tr><td colspan="4">$f(x) = x^9 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 9 \cdot x^8$</td></tr>
<tr><td>Konstantenregel
$c \in \mathbb{R}$</td><td>c</td><td>0</td><td>Konstante Funktionen haben keine Steigung. Somit ergibt auch die Ableitung stets 0.</td></tr>
<tr><td colspan="4">$f(x) = 5 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0 \qquad oder \qquad g(x) = x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad g'(x) = 2x$</td></tr>
<tr><td>Faktorregel
$a \in \mathbb{R}$</td><td>$a \cdot f(x)$</td><td>$a \cdot f'(x)$</td><td>Ein konstanter Faktor ist von der Ableitung nicht betroffen und wird mitgeschrieben.</td></tr>
<tr><td colspan="4">$f(x) = 2 \cdot x^3 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^2 = 6x^2$</td></tr>
<tr><td>Summenregel</td><td>$f(x) + g(x)$</td><td>$f'(x) + g'(x)$</td><td>Eine Summe wird abgeleitet, indem jeder einzelne Summand einzeln abgeleitet wird.</td></tr>
<tr><td colspan="4">$f(x) = x^2 + 3x^4 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x + 3 \cdot 4x^3 = 2x + 12x^3$</td></tr>
<tr><td>Differenzenregel</td><td>$f(x) - g(x)$</td><td>$f'(x) - g'(x)$</td><td>Analog zur Summenregel.</td></tr>
</table>

Prof. Tegischer

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

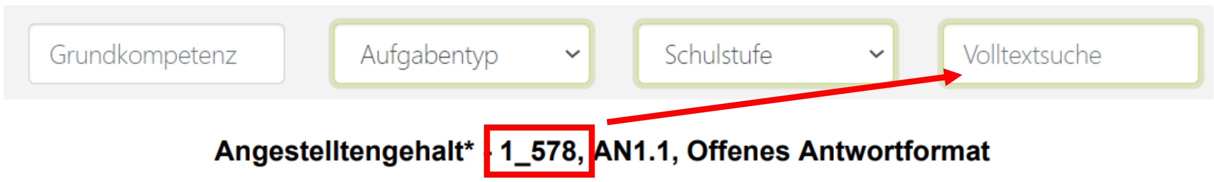
Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/

- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

AN2 – Regeln für das Differenzieren

In diesem Abschnitt lernen wir, wie man die Ableitungsfunktion $f'(x)$ bildet.

Video

Die Funktion $f': D \to \mathbb{R}$ wird Ableitung bzw. Ableitungsfunktion von f genannt.

- ➔ Der Funktionswert von f‘ an der Stelle x entspricht der Steigung der Tangente der ursprünglichen Funktion f an der Stelle x.
- ➔ Die Ermittlung der Ableitungsfunktion nennt man Differenzieren oder Ableiten.

Es gibt mehrere Ableitungsregeln, an die man sich beim **Differenzieren** halten muss:

Regel	$f(x)$	$f'(x)$	Bemerkung
Potenzregel	x^n	$n \cdot x^{n-1}$	Der Exponent kommt herunter. Die Hochzahl wird um 1 vermindert.
$f(x) = x^9 \quad \to \quad f'(x) = 9 \cdot x^8$			
Konstantenregel $c \in \mathbb{R}$	c	0	Konstante Funktionen haben keine Steigung. Somit ergibt auch die Ableitung stets 0.
$f(x) = 5 \quad \to \quad f'(x) = 0 \qquad oder \qquad g(x) = x^2 + 1 \quad \to \quad g'(x) = 2x$			
Faktorregel $a \in \mathbb{R}$	$a \cdot f(x)$	$a \cdot f'(x)$	Ein konstanter Faktor ist von der Ableitung nicht betroffen und wird mitgeschrieben.
$f(x) = 2 \cdot x^3 \quad \to \quad f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^2 = 6x^2$			
Summenregel	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	Eine Summe wird abgeleitet, indem jeder einzelne Summand einzeln abgeleitet wird.
$f(x) = x^2 + 3x^4 \quad \to \quad f'(x) = 2x + 3 \cdot 4x^3 = 2x + 12x^3$			
Differenzenregel	$f(x) - g(x)$	$f'(x) - g'(x)$	Analog zur Summenregel.

Bsp. 1) Bilde die Ableitungsfunktion der Funktion f.

a. $f(x) = 3x^2 + 1$	b. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2$	c. $f(x) = 6x^3 - x^2 + 17$
d. $f(x) = \frac{x^2}{2}$	e. $f(x) = \frac{3x^4}{24} + 6x^3 - \frac{x}{2}$	f. $f(x) = 13x^2 + 12x - 4$

Bsp. 2) Bestimme die Funktionsgleichung der Tangente an der Stelle p der Funktion f.

a. $f(x) = x^2 + 1$ $p = 3$	b. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ $p = -2$	c. $f(x) = 3x^4 - x^3 + 17$ $p = 10$

Ableitung einer Polynomfunktion* - 1_359, AN2.1, Lückentext

Gegeben sind eine reelle Polynomfunktion f und deren Ableitungsfunktion f'.
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Für die 1. Ableitung der Funktion f mit $f(x) =$ ______①______ gilt: $f'(x) =$ ______②______ .

①	
$3x^3 - 4x^2 + 7x - 3$	☐
$6x^2 - 4x + 7$	☐
$3x^2 - 4x + 7$	☐

②	
$x^3 - 2x^2 + 7x$	☐
$6x - 4$	☐
$6x^2 - 4$	☐

Ableitung* - 1_603, AN2.1, 1 aus 6

Gegeben sind sechs Funktionsgleichungen mit einem Parameter k, wobei $k \in \mathbb{Z}$ und $k \neq 0$.
Für welche der gegebenen Funktionsgleichungen gilt der Zusammenhang $f'(x) = k \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?
Kreuzen Sie die zutreffende Funktionsgleichung an!

$f(x) = k$	☐
$f(x) = \frac{k}{x}$	☐
$f(x) = k \cdot x$	☐
$f(x) = x^k$	☐
$f(x) = e^{k \cdot x}$	☐
$f(x) = \sin(k \cdot x)$	☐

Ableitungsregeln* - 1_504, AN2.1, 1 aus 6

Über zwei Polynomfunktionen f und g ist bekannt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$g(x) = 3 \cdot f(x) - 2$

Welche der nachstehenden Aussagen ist jedenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$ wahr? Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an!

$g'(x) = f'(x)$	☐
$g'(x) = f'(x) - 2$	☐
$g'(x) = 3 \cdot f'(x)$	☐
$g'(x) = 3 \cdot f'(x) - 2$	☐
$g'(x) = 3 \cdot f'(x) - 2 \cdot x$	☐
$g'(x) = -2 \cdot f'(x)$	☐

Reelle Funktion* - 1_456, AN2.1, Halboffenes Antwortformat

Eine reelle Funktion f ist durch die Funktionsgleichung $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ gegeben.
Geben Sie eine Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion f' der Funktion f an!

$f'(x) =$ ______________________________

Regeln des Differenzierens* - 1_1193, AN2.1, 2 aus 5

Gegeben sind die zwei differenzierbaren Funktionen f und g und die positive reelle Zahl a.
Kreuzen Sie die beiden Funktionen an, die auf jeden Fall mit $(a^2 \cdot (f + g))'$ übereinstimmen.
[2 aus 5]

$2 \cdot a \cdot f' + 2 \cdot a \cdot g'$	☐
$a^2 \cdot f' + a^2 \cdot g'$	☐
$2 \cdot a \cdot (f + g)'$	☐
$a^2 \cdot (f + g)'$	☐
$f' + g'$	☐

$$\boldsymbol{f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = e^x}$$

Bemerkung: Tritt die Exponentialfunktion in einer Verkettung von Funktionen auf, so musst du bei der Ableitung u.a. die Kettenregel anwenden:

Äußere Ableitung · Innere Ableitung

$$f(x) = e^{3x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$$
$$f(x) = e^{4x^3+2x^2} \quad \rightarrow \quad f'(x) = e^{4x^3+2x^2} \cdot (12x^2 + 4x)$$

$$\boldsymbol{f(x) = \ln(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}}$$

$$f(x) = \ln(3) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{3}$$
$$f(x) = \ln(x^2 - 5x) \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x^2 - 5x} \cdot (2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \sin(x) \rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)}$$
$$\boldsymbol{f(x) = \cos(x) \rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x)}$$

Beispiele:

$$f(x) = \sin(3x^2) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \cos(3x^2) \cdot 6x$$
$$f(x) = \cos(-7x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = -\sin(-7x) \cdot (-7) = 7 \cdot \sin(-7x)$$
$$f(x) = \sin(e^{2x}) \rightarrow \quad f'(x) = \cos(e^{2x}) \cdot e^{2x} \cdot 2$$

Ableitung einer Winkelfunktion* - 1_432, AN2.1, Offenes Antwortformat

Eine Gleichung einer Funktion f lautet:

$f(x) = 5 \cdot \cos(x) + \sin(3 \cdot x)$
Geben Sie eine Gleichung der Ableitungsfunktion f' der Funktion f an!

Sinusfunktion und Cosinusfunktion* - 1_580, AN2.1, 1 aus 6

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \sin(a \cdot x)$ und g mit $g(x) = a \cdot \cos(a \cdot x)$ mit $a \in \mathbb{R}$.
Welche Beziehung besteht zwischen den Funktionen f und g und deren Ableitungsfunktionen?
Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt!

$a \cdot f'(x) = g(x)$	☐
$g'(x) = f(x)$	☐
$a \cdot g(x) = f'(x)$	☐
$f(x) = a \cdot g'(x)$	☐
$f'(x) = g(x)$	☐
$g'(x) = a \cdot f(x)$	☐

Werte einer Ableitungsfunktion* - 1_700, AN2.1, 2 aus 5

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot e^x$.
Die nachstehenden Aussagen beziehen sich auf Eigenschaften der Funktion f bzw. deren Ableitungsfunktion f'.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Es gibt eine Stelle $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 2$.	☐
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) > f'(x + 1)$.	☐
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) = 3 \cdot f(x)$.	☐
Es gibt eine Stelle $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$.	☐
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) \geq 0$.	☐