MISCHAUFGABEN AN1-AN4

Beispiele aus Maturaterminen 2023-24 (AHS, BHS, Kompensationsprüfungen AHS)

TYP-2:

Fahrradtour

Aufgabenstellung:

a) Bettina macht eine 2-stündige Fahrradtour. Ihre Geschwindigkeit kann dabei näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden.

$v(t) = -0{,}08 \cdot t^2 + 16 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 2$

t ... Zeit in h mit $t = 0$ für den Beginn der Fahrradtour
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in km/h

1) Berechnen Sie die Zeitdauer, die Bettina für die ersten 10 km dieser Fahrradtour benötigt. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 1$. Geben Sie auch die zugehörige Einheit an. *[0/½/1 P.]*

b) Der empfohlene Reifendruck eines Fahrradreifens sinkt mit zunehmender Breite des Reifens. Für einen empfohlenen Reifendruck von 2 bar bis 9 bar kann der empfohlene Reifendruck näherungsweise durch die Funktion p beschrieben werden.

$p(x) = 19{,}1 \cdot e^{-0{,}0376 \cdot x}$

x ... Breite des Reifens in mm
$p(x)$ ... empfohlener Reifendruck bei der Breite x in bar

1) Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall für die Breite des Reifens, für das sich ein empfohlener Reifendruck von 2 bar bis 9 bar ergibt. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung unter Angabe der zugehörigen Einheiten im gegebenen Sachzusammenhang.
$p(30) - p(20) \approx -2{,}8$ *[0/1 P.]*

Biathlon

Biathlon ist eine Wintersportart, die Skilanglauf und Schießen kombiniert.

Bei einem bestimmten Wettbewerb müssen drei Runden zu je 2500 m absolviert werden.
Dabei gilt:

- Nach der ersten und nach der zweiten absolvierten Runde findet jeweils ein Schießen statt. Bei jedem Schießen werden fünf Schüsse abgegeben.
- Für jeden Fehlschuss muss eine 150 m lange Strafrunde absolviert werden, wodurch es zu einem Zeitverlust kommt.

Quelle: https://www.sport1.de/wintersport/biathlon/2018/11/biathlon-im-ueberblick-regeln-disziplinen-wissenswertes [15.04.2021].

Aufgabenstellung:

a) Lisa absolviert die drei Runden mit folgenden durchschnittlichen Geschwindigkeiten (v_1, v_2, v_3 in m/s):

- v_1 für die erste Runde
- v_2 für die zweite Runde
- v_3 für die dritte Runde

Für das Schießen benötigt Lisa jeweils die Zeitdauer t^* (t^* in s).
Nach der ersten absolvierten Runde macht sie beim Schießen keinen Fehler.
Nach der zweiten absolvierten Runde macht sie beim Schießen genau 2 Fehler.
Die 2 Strafrunden absolviert sie mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von v_S (v_S in m/s).

Unter der Laufzeit b (b in s) versteht man diejenige Zeit, die Lisa insgesamt für die absolvierten Runden inklusive Strafrunden und für das Schießen benötigt.

1) Stellen Sie mithilfe von v_1, v_2, v_3, t^* und v_S eine Formel zur Berechnung von b auf.

$b =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

b) Die Geschwindigkeit von Hanna in der ersten Runde kann modellhaft durch die Funktion $v\colon [0; 440] \to \mathbb{R}, t \mapsto v(t)$ beschrieben werden (t in s, $v(t)$ in m/s).

1) Interpretieren Sie $\frac{1}{T} \cdot \int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$ mit $T \in (0\text{ s}; 440\text{ s}]$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Es gibt genau zwei Zeitpunkte $t_1, t_2 \in (0\text{ s}; 440\text{ s})$ mit $t_1 < t_2$, für die gilt:
$v'(t_1) = 0$ und $v''(t_1) < 0$
$v'(t_2) = 0$ und $v''(t_2) < 0$

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Zeitpunkte t_1 und t_2 sind _____①_____ der Funktion v und der Wert von $\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$ entspricht dabei der _____②_____ im Zeitintervall $[t_1; t_2]$. *[0/½/1 P.]*

①	
lokale Minimumstellen	☐
lokale Maximumstellen	☐
Wendestellen	☐

②	
durchschnittlichen Geschwindigkeit	☐
Länge der zurückgelegten Strecke	☐
durchschnittlichen Beschleunigung	☐

c) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer von Daria beim Schießen an und wird als binomialverteilt angenommen. Bei jedem der 5 Schüsse ist p die Trefferwahrscheinlichkeit.

1) Stellen Sie unter Verwendung von p eine Formel zur Berechnung der nachstehenden Wahrscheinlichkeit auf.

$P(X \geq 4) =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

BHS – Beispiele:

https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM

Bremsvorgänge

a) Ein LKW bremst vor einer Kreuzung ab.

Die Weg-Zeit-Funktion dieses LKW für den Zeitraum vom Beginn des Bremsvorgangs bis zum Stillstand wird mit s_L bezeichnet.

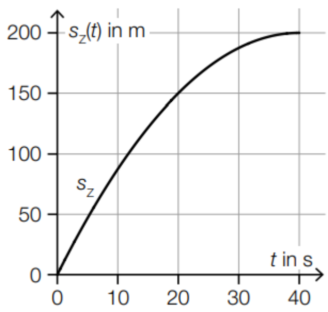
$s_L(t) = 12 \cdot t - t^2$

t ... Zeit in s mit $t = 0$ für den Beginn des Bremsvorgangs
$s_L(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

1) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des LKW zu Beginn des Bremsvorgangs. Geben Sie das Ergebnis in km/h an. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem der LKW zum Stillstand kommt. *[0/1 P.]*

b) Ein Zug bremst vor einer Haltestelle ab. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Weg-Zeit-Funktion s_Z für die letzten 200 m vor dem Stillstand dargestellt.



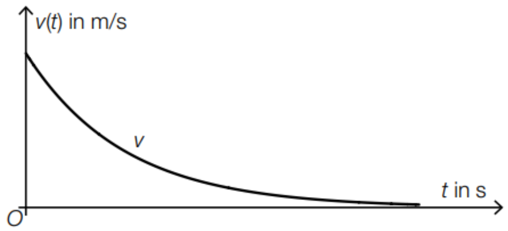
1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die momentane Geschwindigkeit dieses Zuges zur Zeit $t = 20$. *[0/1 P.]*

1) Ordnen Sie den beiden Funktionen jeweils den zutreffenden Graphen aus A bis D zu.

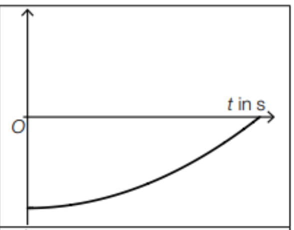
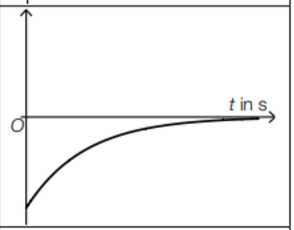
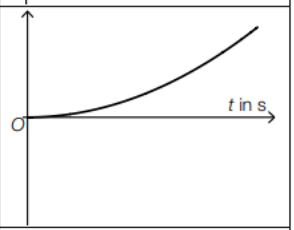
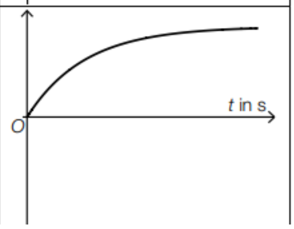
[0/1 P.]

c) Während einer Fahrt mit einem Motorboot wird der Motor abgestellt. Durch den Widerstand im Wasser wird das Motorboot abgebremst.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion des Motorboots dargestellt.

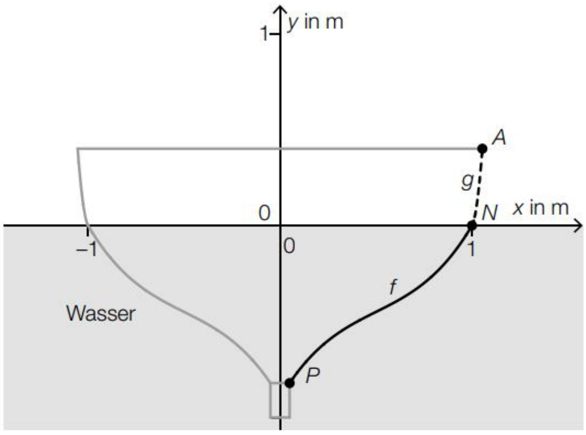


Weg-Zeit-Funktion des Motorboots	
Beschleunigung-Zeit-Funktion des Motorboots	

A	
B	
C	
D	

Ruderboot

In der nachstehenden Abbildung ist der zur y-Achse symmetrische Querschnitt eines Ruderboots modellhaft dargestellt.



Der Graph der Funktion f ist die Begrenzungslinie des Querschnitts vom Punkt P bis zum Punkt N.

Der Graph der quadratischen Funktion g ist die Begrenzungslinie des Querschnitts vom Punkt N bis zum Punkt A.

Für die Funktion f gilt:

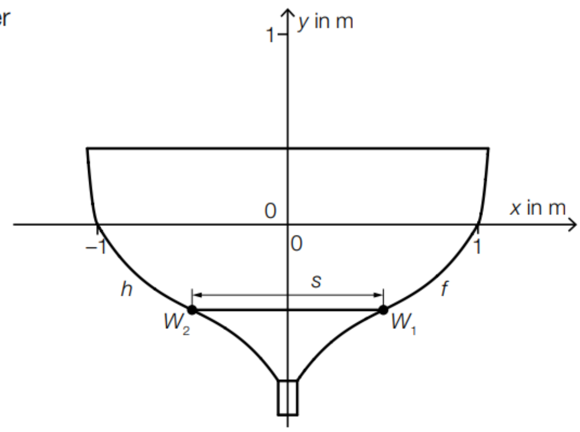
$f(x) = 1{,}6 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 1{,}7 \cdot x - 0{,}9$

a) Im Punkt $N = (1|0)$ haben die Funktionen f und g die gleiche Steigung.
Der Graph von g verläuft durch den Punkt $A = (1{,}05|0{,}35)$.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der quadratischen Funktion g. *[0/1/2 P.]*

2) Berechnen Sie die Koeffizienten von g. *[0/1 P.]*

b) In der nebenstehenden Abbildung sind der Wendepunkt W_1 der Funktion f sowie der Wendepunkt W_2 der zu f symmetrischen Funktion h eingezeichnet.
Zwischen den Punkten W_1 und W_2 soll eine horizontale Verbindung s angebracht werden.



1) Berechnen Sie mithilfe der Funktion f die Länge von s. *[0/1 P.]*

Burgernomics

b) Der Preis für einen Big Mac kann auch zur Beobachtung der Inflation im jeweiligen Land verwendet werden.

Jahr	Preis für einen Big Mac in US-Dollar
1990	2,20
2000	2,51
2010	3,73

Die zeitliche Entwicklung des Preises für einen Big Mac in den USA kann näherungsweise durch die Funktion p beschrieben werden.

$p(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1990
$p(t)$ ... Preis für einen Big Mac zur Zeit t in US-Dollar

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion p. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

   $p(30) = 5{,}86$ *[0/1 P.]*

3) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die mittlere Änderungsrate des Preises für einen Big Mac für jedes Zeitintervall $[0; n]$ berechnet werden kann. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$\frac{p(n)}{n}$	☐
$\frac{p(n) - p(0)}{p(0)}$	☐
$\frac{p(n) - p(0)}{p(n)}$	☐
$\frac{p(n) - p(0)}{n}$	☐
$\frac{p(n)}{p(0)}$	☐

Wandern

a) Lukas unternimmt eine Wanderung.

Zu Beginn wandert er für 1 h 15 min mit einer konstanten Geschwindigkeit von 4 km/h.
Dann wandert er mit einer konstanten Geschwindigkeit von 2 km/h weiter.
Er benötigt für die gesamte Wanderung 3 h 45 min.

1) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit für die gesamte Wanderung. *[0/1 P.]*

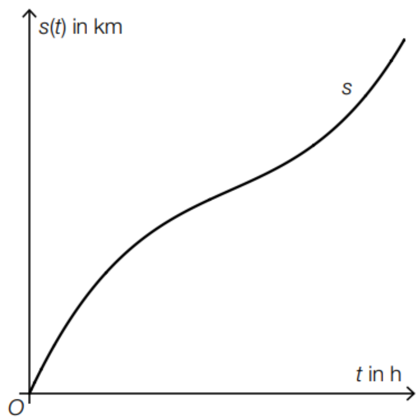
b) Lena unternimmt eine Wanderung.

Der von ihr zurückgelegte Weg kann dabei in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die Funktion s beschrieben werden.

$s(t) = 0{,}32 \cdot t^3 - 2{,}32 \cdot t^2 + 7{,}08 \cdot t \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 4{,}5$

t ... Zeit seit Beginn der Wanderung in h
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in km

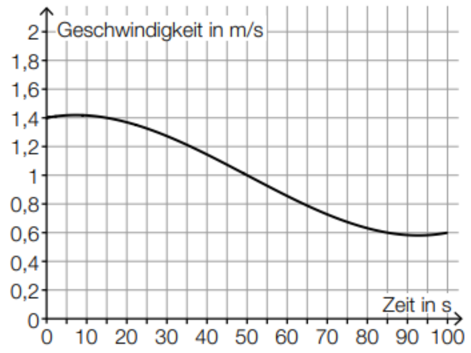
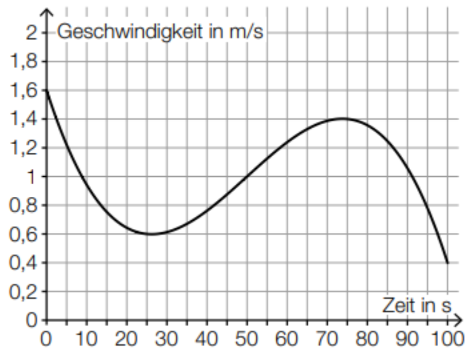
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion s dargestellt.



1) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit Lena mit der geringsten Geschwindigkeit wandert. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie dasjenige Zeitintervall, in dem Lena mit einer Geschwindigkeit von höchstens 5 km/h wandert. *[0/1 P.]*

c) 1) Ordnen Sie den beiden Geschwindigkeit-Zeit-Diagrammen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

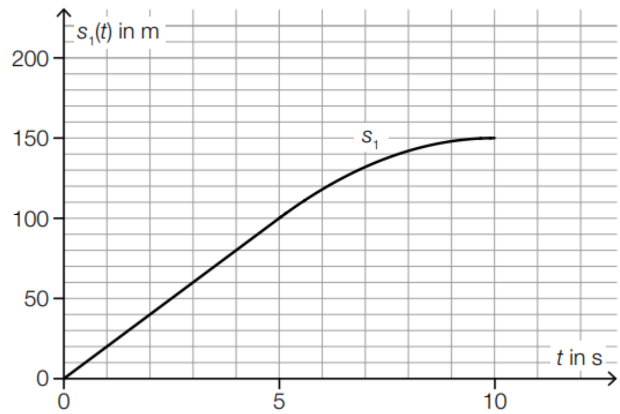
	
	

A	Die Geschwindigkeit ist nach etwa 26 Sekunden am höchsten.
B	Die Beschleunigung ist nach etwa 50 Sekunden am geringsten.
C	Der zurückgelegte Weg im Zeitintervall [70; 80] ist länger als jener im Zeitintervall [20; 30].
D	Im Zeitintervall [0; 100] ist die Geschwindigkeit nach etwa 75 Sekunden am höchsten.

Testfahrten

Auf drei Teststrecken werden Testfahrten mit Autos durchgeführt.

a) Eine bestimmte Testfahrt auf der ersten Teststrecke kann modellhaft durch die nachstehend dargestellte Weg-Zeit-Funktion s_1 beschrieben werden.

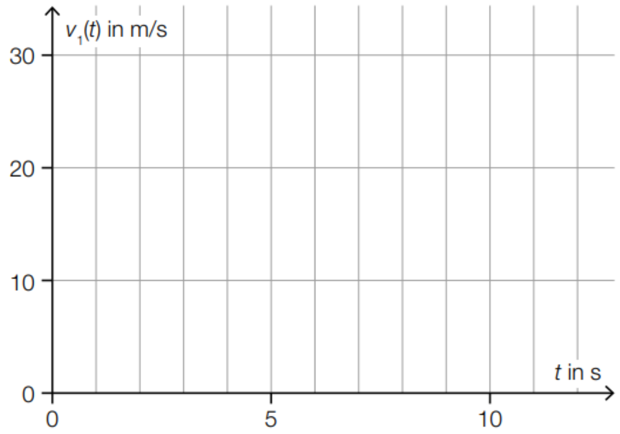


t ... Zeit in s
$s_1(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Autos auf den letzten 70 m der Testfahrt.

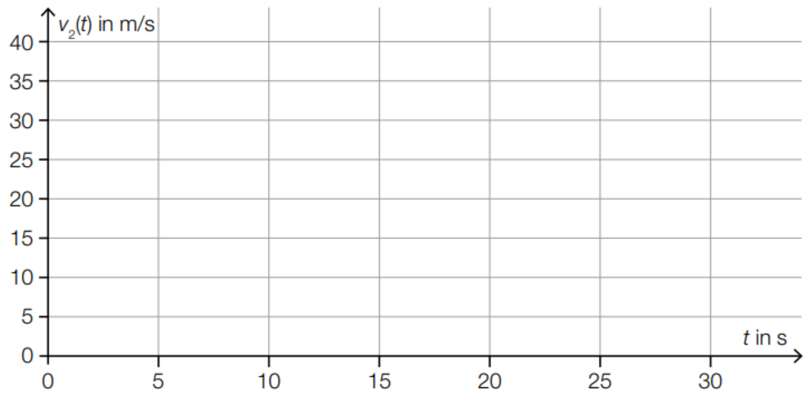
Die Weg-Zeit-Funktion s_1 setzt sich aus einer linearen Funktion (im Zeitintervall [0; 5]) und einer quadratischen Funktion (im Zeitintervall [5; 10]) zusammen (siehe obige Abbildung).
An der Stelle $t = 5$ haben die lineare Funktion und die quadratische Funktion die gleiche Steigung.
An der Stelle $t = 10$ hat die quadratische Funktion die Steigung 0.

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v_1 ein. *[0/1 P.]*



b) Für eine bestimmte 30 s lange Testfahrt auf der zweiten Teststrecke gilt:
Zu Beginn ($t = 0$) steht das Auto still.
Im Zeitintervall [0; 10] nimmt die Geschwindigkeit bis 25 m/s mit konstanter Beschleunigung zu.
Im Zeitintervall [10; 30] nimmt die Geschwindigkeit mit konstanter Beschleunigung ab.
Am Ende ($t = 30$) steht das Auto wieder still.

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v_2 im Zeitintervall [0; 30] ein. *[0/1 P.]*



Kompensation AHS

https://www.mathago.at/kompensationspruefung-loesungen/

Jänner 2024, Prüfung 1: Gewitter

Gewitter

Im Juni 2012 fanden in Österreich schwere Gewitter statt.

a) Bei einem Gewitter in Graz wurden folgende Daten ermittelt:
Zu Beginn des Gewitters betrug der momentane Niederschlag pro Quadratmeter 150 ml pro min.
Das Maximum des momentanen Niederschlags pro Quadratmeter wurde 50 min nach dem Beginn des Gewitters erreicht und betrug 400 ml pro min.

Der zeitliche Verlauf des momentanen Niederschlags pro Quadratmeter kann näherungsweise durch die quadratische Funktion f mit $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

t ... Zeit ab Beginn des Gewitters in min
$f(t)$ ... momentaner Niederschlag pro Quadratmeter zum Zeitpunkt t in ml pro min

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

b) In Mürzzuschlag dauerte ein Gewitter 2,5 h. Für dieses Gewitter kann der momentane Niederschlag pro Quadratmeter näherungsweise durch die nachstehende Funktion N beschrieben werden.

$$N(t) = -\frac{44}{3} \cdot t^3 + 44 \cdot t^2 - \frac{103}{3} \cdot t + 40 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 2{,}5$$

t ... Zeit ab Beginn des Gewitters in h
$N(t)$ ... momentaner Niederschlag pro Quadratmeter zum Zeitpunkt t in L pro h

Die gesamte Niederschlagsmenge pro Quadratmeter im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ kann durch den nachstehenden Ausdruck berechnet werden.

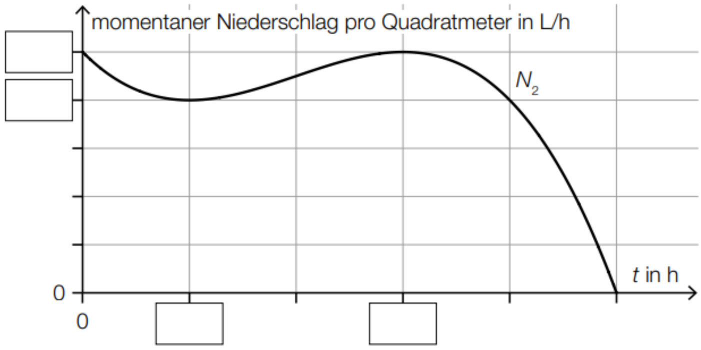
$$\int_{t_1}^{t_2} N(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Berechnen Sie die gesamte Niederschlagsmenge pro Quadratmeter, die in diesen 2,5 Stunden gefallen ist. Geben Sie das Ergebnis mit der zugehörigen Einheit an.

c) Auch in einer benachbarten Gemeinde wurde der momentane Niederschlag pro Quadratmeter gemessen.
Mithilfe der gemessenen Werte wurde der Graph der Polynomfunktion 3. Grades N_2 erstellt.

- $t_w = 1$ ist die Wendestelle der Funktion N_2.
- An der Minimumstelle t_m der Funktion N_2 gilt: $f(t_m) = 32$ und $f'(t_m) = 0$

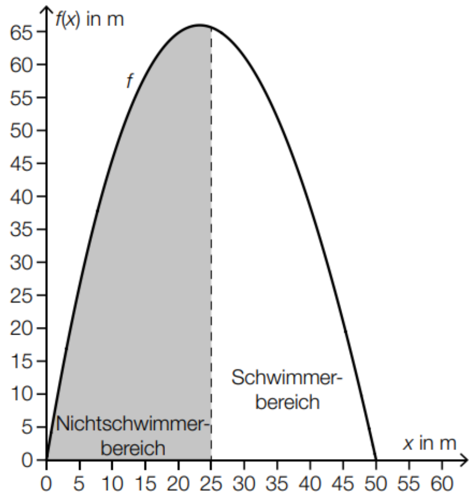
1) Tragen Sie in der nachstehenden Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



Jänner 2024, Prüfung 2: Park

Park

a) In einem Park wird ein Schwimmteich angelegt. In der nachstehenden Abbildung ist dieser Schwimmteich in der Ansicht von oben modellhaft dargestellt.



Eine Begrenzungslinie des Schwimmteichs kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden.

$f(x) = 0{,}0006 \cdot x^3 - 0{,}15 \cdot x^2 + 6 \cdot x \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 50$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Nichtschwimmerbereichs.

b) In diesem Park gibt es Wanderwege. Das Höhenprofil eines Wanderwegs wird durch die quadratische Funktion h modelliert.

$h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... waagrechte Entfernung vom Startpunkt in m
$h(x)$ ... Höhe über dem Meeresspiegel bei der Entfernung x in m

Der Startpunkt des Wanderwegs hat eine Höhe über dem Meeresspiegel von 200 m.
An der Stelle $x = 100$ m hat das Höhenprofil eine Steigung von 5 %.
An der Stelle $x = 500$ m hat das Höhenprofil ein Maximum.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

2) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet werden kann.

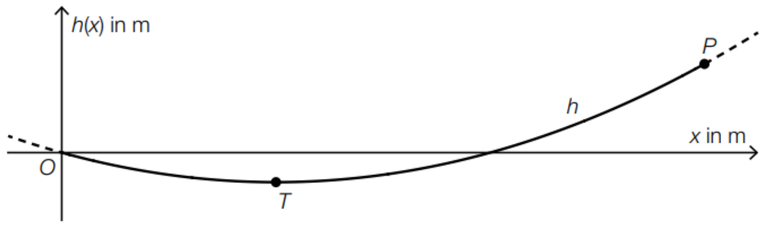
$$\frac{h(600) - h(0)}{600 - 0}$$

Oktober 2023, Prüfung 1: Hängebrücke

Hängebrücke

Der Verlauf einer bestimmten Hängebrücke für Fußgänger lässt sich modellhaft durch quadratische Funktionen beschreiben.

a) In einem Modell wird der Verlauf der Hängebrücke durch die Funktion h mit
$h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ beschrieben (siehe nachstehende Abbildung in der Ansicht von der Seite).



Der Graph von h verläuft durch den Punkt $P = (120|6)$. An der Stelle $x = 40$ befindet sich der tiefste Punkt T der Brücke.

Zur Berechnung der Koeffizienten a und b wird mithilfe der Informationen zu den Punkten P und T das nachstehende Gleichungssystem erstellt.

1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$$\text{I: } a \cdot \boxed{}^2 + b \cdot \boxed{} = \boxed{}$$

$$\text{II: } a \cdot \boxed{} + b = \boxed{}$$

Für die Funktion h gilt: $h(x) = 0{,}00125 \cdot x^2 - 0{,}1 \cdot x$

2) Berechnen Sie den Steigungswinkel der Tangente an den Graphen von h im Punkt P.

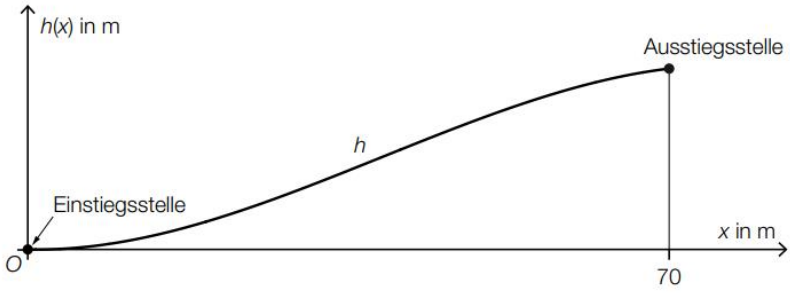
In einem anderen Koordinatensystem kann der Verlauf der Hängebrücke durch die Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2$ beschrieben werden.

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Koordinatenachsen für den Graphen von f ein.

Oktober 2023, Prüfung 2: Kinderskikurs

Kinderskikurs

a) Auf einem Übungshang können Kinder mit einem Förderband von der Einstiegsstelle zur Ausstiegsstelle befördert werden (siehe nachstehende Abbildung in der Ansicht von der Seite).



Der Graph der Funktion h beschreibt modellhaft den Verlauf dieses Förderbands.

$h(x) = -\frac{1}{42875} \cdot x^3 + \frac{3}{1225} \cdot x^2$

1) Berechnen Sie die mittlere Steigung des Förderbands zwischen Einstiegsstelle und Ausstiegsstelle.

Bei $x_1 = 35$ hat das Förderband die größte Steigung von 8,5... %.

2) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$h'(x_1) = \boxed{}$

$h''(x_1) = \boxed{}$

b) Ein Kind fährt einen Übungshang hinunter. Die Funktion v beschreibt die Geschwindigkeit des Kindes in Abhängigkeit von der Zeit t (t in s, $v(t)$ in m/s).

Es gilt: $\int_0^{45} v(t)\,\mathrm{d}t = 55$

1) Interpretieren Sie die beiden Zahlen 45 und 55 unter Verwendung der entsprechenden Einheiten im gegebenen Sachzusammenhang.

Mai 2023, Prüfung 1: Spielgeräte

Spielgeräte

Eine Firma produziert und verkauft Spielgeräte.
Um wirtschaftlich planen zu können, werden Kosten, Erlös und Gewinn untersucht.

a) Die Kosten lassen sich näherungsweise durch die quadratische Funktion K modellieren.

$$K(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

x ... produzierte Spielgeräte in ME
$K(x)$ ... Kosten bei x produzierten Spielgeräten in GE

Es gilt:

Die Fixkosten betragen 22 GE.
Bei 20 ME betragen die Kosten 40 GE.
Bei 20 ME beträgt die lokale Änderungsrate der Kosten 1,5 GE/ME.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von K.

b) Der Gewinn lässt sich näherungsweise durch die Funktion G beschreiben.

$$G(x) = -\frac{11}{300} \cdot (x^2 - 70 \cdot x + 600)$$

x ... verkaufte Spielgeräte in ME
$G(x)$ ... Gewinn bei x verkauften Spielgeräten in GE

1) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion G.

c) Für ein bestimmtes x_0 gilt:

$E'(x_0) = 0$
$E''(x_0) < 0$

x ... verkaufte Spielgeräte in ME
$E(x)$ ... Erlös bei x verkauften Spielgeräten in GE

1) Interpretieren Sie die Bedeutung von x_0 im gegebenen Sachzusammenhang.

Mai 2023, Prüfung 2: Smartphones

Smartphones

Die (weltweit durchschnittlichen) Anschaffungskosten in US-Dollar ($) für ein bestimmtes Smartphone sind für verschiedene Jahre in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Jahr	2010	2013	2015	2018
Anschaffungskosten in $	363	284	252	345

a) **1)** Berechnen Sie die durchschnittliche Änderung der Anschaffungskosten in $ pro Jahr im Zeitraum von 2013 bis 2018.

b) Die Anschaffungskosten in Abhängigkeit von der Zeit t können in einem einfachen Modell durch die Polynomfunktion 3. Grades K beschrieben werden.

$$K(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$$

t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2010
$K(t)$ … Anschaffungskosten zur Zeit t in $

1) Begründen Sie mithilfe der 2. Ableitung der Funktion K, warum die Funktion K genau 1 Wendestelle hat.

2) Erstellen Sie mithilfe der obigen Tabelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion K.

Mai 2023, Prüfung 2: Pendelbewegung

Pendelbewegung

Eine rote und eine blaue Kugel, die an unterschiedlich langen Schnüren befestigt sind, pendeln von links nach rechts und wieder zurück. Dieser Vorgang wiederholt sich mehrmals.

Die Geschwindigkeit der roten Kugel in den ersten 10 Sekunden ihrer Pendelbewegung wird näherungsweise durch die Funktion $v_R\colon [0; 10] \to \mathbb{R}$ mit $v_R(t) = 30 \cdot \sin(\pi \cdot t)$ modelliert (t in s, $v_R(t)$ in cm/s).

Für die Bewegung vom Ausgangspunkt nach rechts gilt: $v_R(t) > 0$

Für die Bewegung zum Ausgangspunkt nach links gilt: $v_R(t) < 0$

a) **1)** Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$v_R'(0{,}4) \approx 29$

Es wird eine Hin- und Herschwingung betrachtet. Die rote Kugel bewegt sich dabei ausgehend vom Ausgangspunkt also einmal nach rechts und anschließend wieder nach links zum Ausgangspunkt. Die Schwingungsdauer beträgt dabei 2 Sekunden.

2) Berechnen Sie den dabei zurückgelegten Weg der roten Kugel.

b) Es gilt:

Die Maximalgeschwindigkeit der blauen Kugel ist doppelt so groß wie die der roten Kugel.
Die Schwingungsdauer der blauen Kugel ist doppelt so groß wie die der roten Kugel.

1) Stellen Sie die Funktionsgleichung für die Geschwindigkeit v_B der blauen Kugel auf (t in s, $v_B(t)$ in cm/s).

$v_B(t) =$ ______________________________

Mai 2023, Prüfung 3: Vorhang

Vorhang

a) In den unten stehenden Abbildungen ist eine Doppeltüre mit Vorhängen modellhaft dargestellt. Die Begrenzungslinien der Vorhänge können modellhaft durch die Graphen der Funktionen f, g und h beschrieben werden.

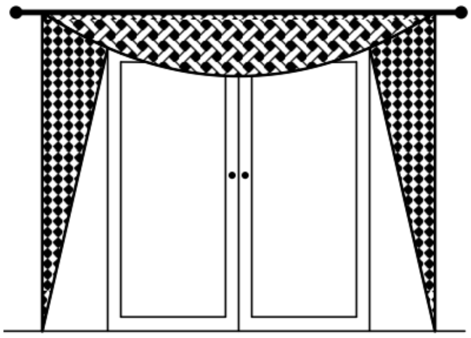


Abbildung 1

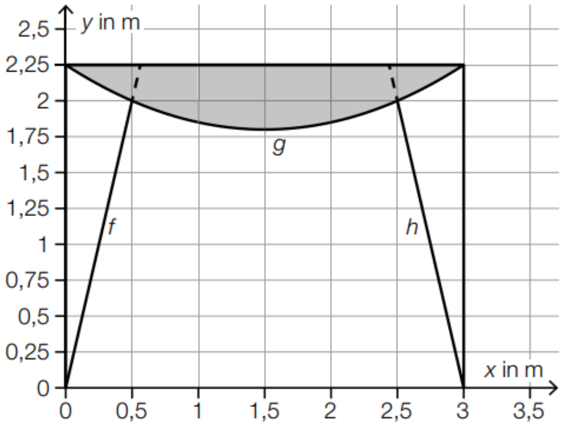


Abbildung 2

1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Funktion h auf.

Es gilt:
$g(x) = 0{,}2 \cdot x^2 - 0{,}6 \cdot x + 2{,}25 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 3$

2) Berechnen Sie den Inhalt der in der obigen Abbildung 2 grau markierten Fläche.

Die Funktion g hat an der Stelle $x = 1{,}5$ ihren Tiefpunkt.

3) Tragen Sie die fehlenden Zahlen (größer 1) in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$g(1) = g(\boxed{})$

$-g'(0{,}5) = g'(\boxed{})$

Mai 2023, Prüfung 4: Wasserstand eines Flusses

Wasserstand eines Flusses

Die Funktion h beschreibt näherungsweise den zeitlichen Verlauf des Wasserstands eines bestimmten Flusses an einer Messstelle.

t ... Zeit in h
$h(t)$ ... Wasserstand zum Zeitpunkt t in m

a) 1) Stellen Sie einen Ausdruck zur Berechnung der mittleren Änderungsrate des Wasserstands im Zeitintervall $[0; a]$ auf.

b) Nach einem starken Regen beginnt der Wasserstand dieses Flusses zu steigen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat der Wasserstand die Hochwasser-Vorwarnstufe erreicht.

Für die Funktion h gilt:

$$h(t) = \frac{3}{1000} \cdot (t^3 - 40 \cdot t^2 + 370 \cdot t + 700) \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 20$$

1) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem der Wasserstand erstmals wieder die Höhe der Hochwasser-Vorwarnstufe erreicht.

Für einen bestimmten Zeitpunkt t_0 mit $0 \leq t_0 \leq 20$ gilt:

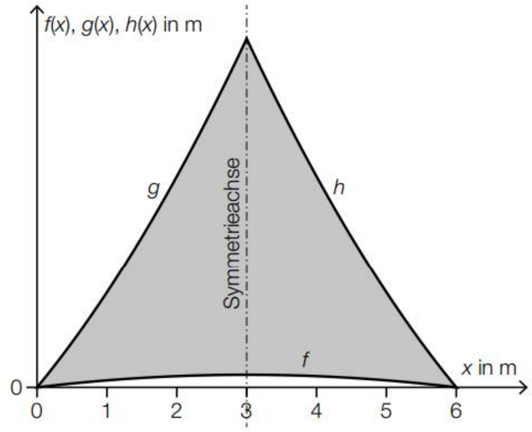
$h'(t_0) = 0$
$h''(t_0) < 0$
$h(t_0) \approx 5$

2) Interpretieren Sie den Wert 5 im gegebenen Sachzusammenhang.

Mai 2023, Prüfung 5: Beschattung

Beschattung

a) Für die Beschattung einer Terrasse wird ein symmetrisches Sonnensegel aus Stoff angefertigt. Die Begrenzungslinien können mithilfe der Graphen der Funktionen f, g und h beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Der Flächeninhalt A der grau markierten Fläche soll berechnet werden.

1) Tragen Sie in die nachstehende Formel die fehlenden Ausdrücke in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$$A = 2 \cdot \int_0^{\square} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\square} \square\,\mathrm{d}x$$

Für die Funktion f gilt: $f(x) = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + u \cdot x$

2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Koeffizienten u.

Eine der Begrenzungslinien kann durch den Graphen der Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.

3) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Der Koeffizient a muss ___①___ sein; der Graph der Funktion h ___②___.

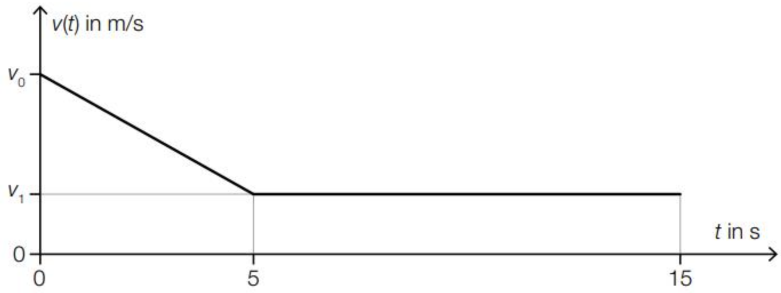
①	
positiv	☐
negativ	☐
gleich null	☐

②	
ist positiv gekrümmt	☐
ist negativ gekrümmt	☐
hat keine Krümmung	☐

Februar 2023, Prüfung 1: Autofahrt

Autofahrt

a) In der nachstehenden Abbildung ist die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit für eine bestimmte Autofahrt in einem Zeitraum von 15 s dargestellt.



Der zurückgelegte Weg in den ersten 5 s ist gleich lang wie der zurückgelegte Weg in den darauffolgenden 10 s.

1) Stellen Sie mithilfe von v_0 und v_1 eine Gleichung auf, die diesen Sachverhalt richtig beschreibt.

b) Für eine andere Autofahrt kann die Geschwindigkeit näherungsweise durch die Funktion v_A beschrieben werden.

$v_A(t) = 70 \cdot t^3 - 260 \cdot t^2 + 230 \cdot t + 80 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 1{,}5$

t ... Zeit in h

$v_A(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in km/h

1) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit bei dieser Autofahrt.

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

   $v_A'(0) = 230$

Februar 2023, Prüfung 2: Blutzucker

Blutzucker

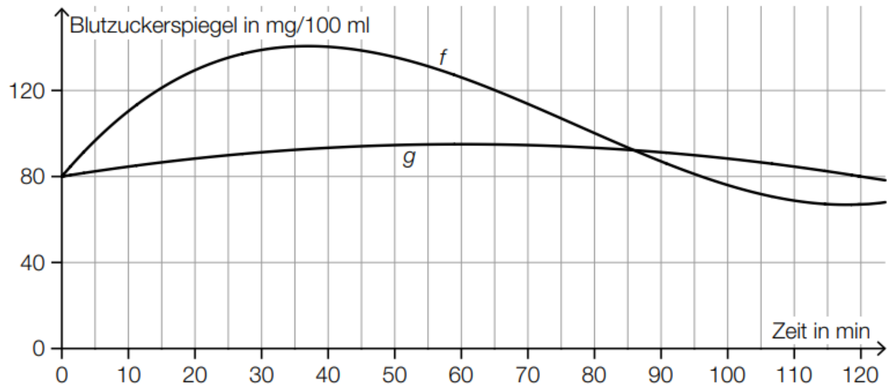
a) Die Funktion f beschreibt näherungsweise den zeitlichen Verlauf des Blutzuckerspiegels einer bestimmten Person, die ein Stück Traubenzucker einnimmt.

$f(t) = 0{,}00028 \cdot t^3 - 0{,}065 \cdot t^2 + 3{,}66 \cdot t + 80 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 120$

t ... Zeit nach der Einnahme in min
$f(t)$ ... Blutzuckerspiegel zum Zeitpunkt t in mg/100 ml

1) Berechnen Sie den maximalen Blutzuckerspiegel im Zeitintervall [0; 120].

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Funktion f und der Verlauf des Blutzuckerspiegels nach der Einnahme einer bestimmten Menge an Kidneybohnen durch den Graphen der Funktion g dargestellt.



Der glykämische Index G von Kidneybohnen entspricht dem relativen Anteil des Flächeninhalts unter dem Graphen von g im Intervall [0; 120] bezogen auf den Flächeninhalt unter dem Graphen von f im Intervall [0; 120].

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des glykämischen Index G auf.

$G =$ ____________________

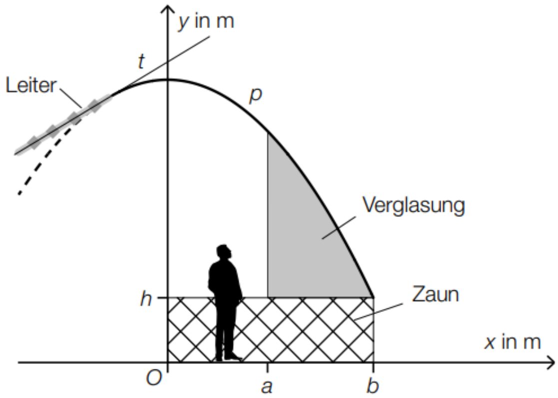
Bei einem Blutzuckerspiegel von unter 80 mg/100 ml stellt sich ein Hungergefühl ein. Dieses tritt nach der Einnahme von Traubenzucker früher auf als nach der Einnahme von Kidneybohnen.

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung diesen Zeitunterschied ab.

Oktober 2022, Prüfung 1: Aussichtsplattform

Aussichtsplattform

In der unten stehenden Abbildung ist eine überdachte Aussichtsplattform in der Ansicht von der Seite dargestellt.



a) Das Dach wird durch den Graphen der quadratischen Funktion p modelliert.

$p(x) = -0{,}302 \cdot x^2 + 4{,}8$

x, $p(x)$ ... Koordinaten in m

Für Reinigungszwecke ist eine Leiter auf dem Dach montiert. Die Leiter verläuft entlang der Tangente t an den Graphen von p an der Stelle $x = -1$.

1) Berechnen Sie den Steigungswinkel der Tangente t.

b) Die Plattform soll seitlich verglast werden. Die Verglasung soll von der Oberkante des Zaunes bis zur Überdachung reichen (siehe obige Abbildung).

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf.

$A =$ ____

c) Aus Sicherheitsgründen soll für das Dach eine Verstrebung mit der Länge $\ell = p(a) - h$ angebracht werden.

1) Kennzeichnen Sie ℓ in der obigen Abbildung.

Oktober 2022, Prüfung 2: Datenspeicherung

Datenspeicherung

a) Für die Speicherung von Daten werden immer öfter sogenannte *SSDs* verwendet.
Im Jahr 2015 wurden von diesen SSDs 103 Millionen Stück verkauft, im Jahr 2020 waren es 223 Millionen Stück.

1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$$\frac{223 - 103}{2020 - 2015} = 24$$

Die zeitliche Entwicklung der insgesamt bis zum Zeitpunkt t verkauften SSDs soll durch die Polynomfunktion 3. Grades f modelliert werden.

$$f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$$

t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Ende des Jahres 2013
$f(t)$ … Anzahl der insgesamt bis zum Zeitpunkt t verkauften SSDs in Millionen Stück

In der nachstehenden Tabelle ist die Anzahl der insgesamt verkauften SSDs für drei Jahre angegeben.

Ende des Jahres	2013	2015	2020
Anzahl der insgesamt verkauften SSDs in Millionen Stück	57	160	383

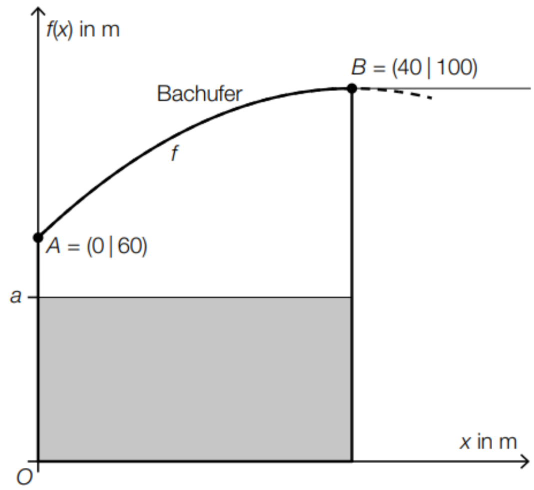
Am Ende des Jahres 2020 betrug die momentane Änderungsrate für die Anzahl der insgesamt verkauften SSDs 14,2 Millionen Stück pro Jahr.

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten a, b, c und d.

Oktober 2022, Prüfung 2: Bachufer

Bachufer

a) In der nachstehenden Abbildung ist ein Grundstück in einem Koordinatensystem modellhaft dargestellt.



Das Grundstück wird auf einer Seite durch ein Bachufer begrenzt. Der Verlauf dieses Bachufers kann im Intervall [0; 40] näherungsweise durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden.

$f(x) = -0{,}025 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 60$

Die Hälfte des gesamten Grundstücks soll begrünt werden. Daher wird ein rechteckiger Teil des Grundstücks eingezäunt (siehe obige Abbildung).

1) Berechnen Sie die Seitenlänge a des Rechtecks.

Von A bis B wird ein anderer geradlinig verlaufender Zaun errichtet.

2) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden durch die Punkte A und B auf.

Der Verlauf des Bachufers kann ab dem Punkt B näherungsweise durch die Tangente an die Funktion f beschrieben werden (siehe obige Abbildung).

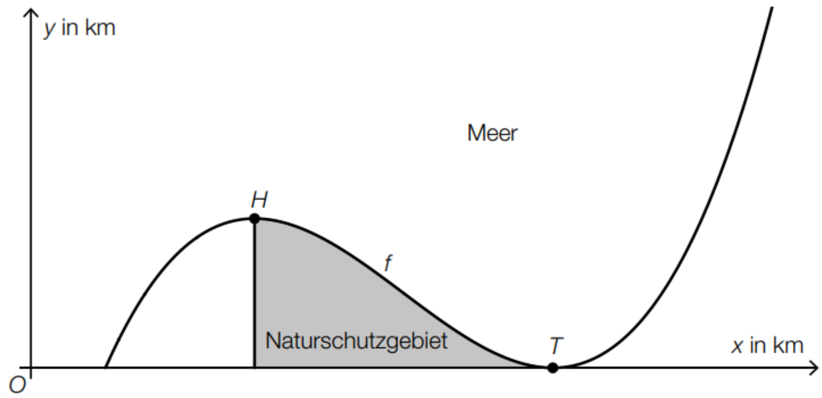
3) Zeigen Sie, dass die Tangente an die Funktion f im Punkt B parallel zur x-Achse verläuft.

Juni 2022, Prüfung 1: Küste

Küste

Auf einer Insel liegt ein Naturschutzgebiet.

a) In der nachstehenden Abbildung sind ein Teil der Küstenlinie dieser Insel und das Naturschutzgebiet (grau markiert) modellhaft dargestellt.



Diese Küstenlinie wird durch den Graphen der Polynomfunktion 3. Grades f beschrieben.
$H = (30|10)$ und $T = (70|0)$ sind die Extrempunkte der Funktion f.

1) Erstellen Sie mithilfe von H und T ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f.

2) Interpretieren Sie das Ergebnis des nachstehenden Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang unter der Bedingung, dass F eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$F(70) - F(30) = 200$

Juni 2022, Prüfung 2: Brunnen

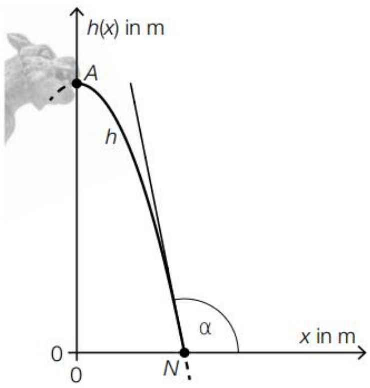
Brunnen

a) Die Anzahl der Brunnen in einem bestimmten Land stieg von knapp 4 000 im Jahr 1968 auf etwa 32 000 im Jahr 2012.

1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{32\,000 - 4\,000}{2012 - 1968} \approx 636$$

b) In der nachstehenden Abbildung ist ein Wasserstrahl, der waagrecht aus einem Wasserspeier austritt, modellhaft dargestellt.



Bildquelle: Reinhold Möller – own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Paris_Montmartre_Sacré-Cœur_Gargoyle--20140603-RM-160933.jpg [26.01.2021] (adaptiert).

Der Verlauf des Wasserstrahls kann näherungsweise durch die quadratische Funktion h beschrieben werden.
A ist der Hochpunkt der Funktion h.
Im Punkt $N = (0{,}4\,|\,0)$ trifft der Wasserstrahl unter einem Winkel von $\alpha = 101{,}31°$ auf dem Boden auf.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion h.

c) Fällt ein Stein senkrecht in einen leeren Brunnenschacht, so lässt sich sein zurückgelegter Weg näherungsweise durch die Funktion s beschreiben.

$s(t) = 5 \cdot t^2$

t ... Zeit in s
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in m

Nach 5 Sekunden trifft der Stein auf dem Boden des Brunnenschachts auf.

1) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der der Stein auf dem Boden auftrifft.

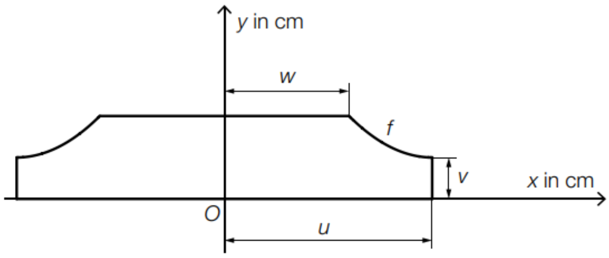
Juni 2022, Prüfung 5: Rohrabdeckung

Rohrabdeckung

a) In der nebenstehenden Abbildung ist das Bild einer Rohrabdeckung für zwei Heizungsrohre dargestellt.

Bildquelle: BMBWF

In der nachstehenden Abbildung ist die Querschnittsfläche dieser Rohrabdeckung in der Ansicht von der Seite modellhaft dargestellt.



Ein Teil der Begrenzungslinie des Querschnitts kann durch den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ modelliert werden.

Der Scheitelpunkt der Funktion f hat die Koordinaten $(u \mid v)$.
Der Steigungswinkel an der Stelle w beträgt –45°.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c. Verwenden Sie dabei u, v und w.

2) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.

$$\int_w^u f(x)\,\mathrm{d}x$$

Für eine bestimmte Rohrabdeckung mit $u = 5$ gilt:

$f(x) = 0{,}25 \cdot x^2 - 2{,}5 \cdot x + 8{,}75 \quad \text{mit} \quad w \leq x \leq u$

3) Berechnen Sie für diese Rohrabdeckung die Länge v.

Juni 2022, Prüfung 6: Drohnenflug

Drohnenflug

a) Die Funktion v beschreibt näherungsweise die Geschwindigkeit einer bestimmten Drohne im Zeitintervall $[t_1; t_2]$.

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der mittleren Beschleunigung a der Drohne im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ auf.

$a =$ ____________________________________

b) Die Funktion f beschreibt die Geschwindigkeit einer anderen Drohne.

$f(t) = 30 - 30 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}$ mit $0 \leq t \leq 60$

t ... Zeit ab dem Start der Drohne in s
$f(t)$ ... Geschwindigkeit der Drohne zum Zeitpunkt t in m/s

1) Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass die Funktion f streng monoton steigend ist.

2) Berechnen Sie den zurückgelegten Weg dieser Drohne im Zeitintervall [0; 60].