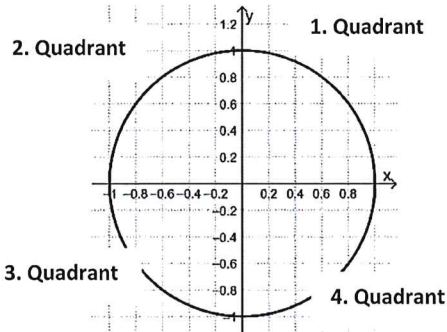


# LÖSUNGEN

## Trigonometrie im allgemeinen Dreieck



### 1. WINKELFUNKTIONEN FÜR BELIEBIGE DREIECKE



#### 1.1 DER EINHEITSKREIS

- Ein Kreis mit dem Radius 1 wird **Einheitskreis** genannt.
- Als **Mittelpunkt** wird der **Ursprung** verwendet.
- Punkte der Kreislinie** liegen entweder auf den **Koordinatenachsen** oder in einem der **vier Quadranten**.

Video 1/13

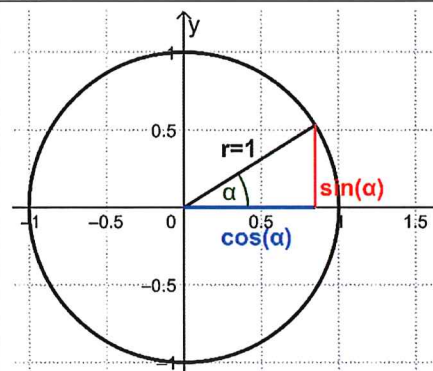


Video 2/13

#### 1.2 COSINUS UND SINUS AM EINHEITSKREIS

Bis jetzt sind die Winkelfunktionen nur für **spitze Winkel**, d.h. Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$ , im **rechtwinkligen Dreieck** betrachtet worden. Im Folgenden werden die Winkelfunktionen auch für Winkel **größer als  $90^\circ$**  beschrieben: dazu wird der **Einheitskreis** verwendet.

Zu jedem Punkt P auf der Kreislinie lässt sich im Einheitskreis ein rechtwinkliges Dreieck mit dem **Kreisradius  $r = 1$**  als **Hypotenuse** und den **Koordinatenstrecken x und y** als **Katheten** angeben.



Die **Hypotenuse** schließt mit der **x-Achse** den **Winkel  $\alpha$**  ein. Nach der Definition von Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck ergeben sich für die Koordinaten des Punktes  $P = (x|y)$  folgende Beziehungen:

$$x = \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Ankathete}}{1} \quad \dots \text{ waagrechte Strecke (= COSINUS)}$$

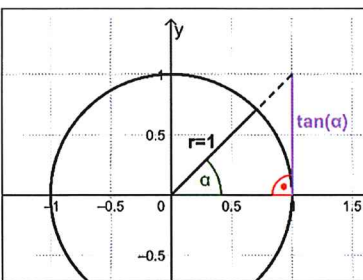
$$y = \sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{1} \quad \dots \text{ senkrechte Strecke (= SINUS)}$$

Für einen Punkt P gilt:  $P = (x|y) = (\cos(\alpha) | \sin(\alpha))$



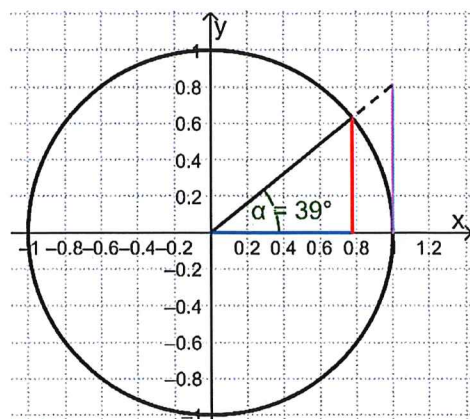
#### 1.3 TANGENS AM EINHEITSKREIS

Video 3/13



Im Punkt  $(1|0)$  des Einheitskreises wird eine zur zweiten Achse **parallele Tangente** gelegt und der **Kreisradius** über P hinaus **verlängert**. Die Länge der Strecke von  $(1|0)$  bis zum Schnittpunkt der verlängerten Hypotenuse mit der Tangente ist der **Tangenswert** des Winkels  $\alpha$ :

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{1} = \text{Gegenkathete}$$



**Bsp. 1)** Gegeben ist der Einheitskreis. Welche Streckenlängen entsprechen dem Cosinus-, Sinus- und Tangenswert des Winkels? Markiere die Strecken mit unterschiedlichen Farben und bestimme die Werte.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &\approx 0,78 \\ \sin(\alpha) &= 0,63 \\ \tan(\alpha) &\approx 0,81 \end{aligned}$$

**Bsp. 2)** Zeichne in den Einheitskreis den gegebenen Winkel. Miss die Werte der drei Winkelfunktionen ab. Überprüfe mit Technologie.

$\alpha = 45^\circ$		$\alpha = 60^\circ$		$\alpha = 33^\circ$																																																																									
<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>gemessen</th> <th>TR</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\sin(45^\circ)</math></td> <td>0,7</td> <td>0,71</td> </tr> <tr> <td><math>\cos(45^\circ)</math></td> <td>0,7</td> <td>0,71</td> </tr> <tr> <td><math>\tan(45^\circ)</math></td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		gemessen	TR	$\sin(45^\circ)$	0,7	0,71	$\cos(45^\circ)$	0,7	0,71	$\tan(45^\circ)$	1	1	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>gemessen</th> <th>TR</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\sin(60^\circ)</math></td> <td>0,83</td> <td>0,87</td> </tr> <tr> <td><math>\cos(60^\circ)</math></td> <td>0,5</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td><math>\tan(60^\circ)</math></td> <td>1,8</td> <td>1,73</td> </tr> </tbody> </table>		gemessen	TR	$\sin(60^\circ)$	0,83	0,87	$\cos(60^\circ)$	0,5	0,5	$\tan(60^\circ)$	1,8	1,73	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>gemessen</th> <th>TR</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\sin(33^\circ)</math></td> <td>0,55</td> <td>0,54</td> </tr> <tr> <td><math>\cos(33^\circ)</math></td> <td>0,85</td> <td>0,84</td> </tr> <tr> <td><math>\tan(33^\circ)</math></td> <td>0,7</td> <td>0,65</td> </tr> </tbody> </table>		gemessen	TR	$\sin(33^\circ)$	0,55	0,54	$\cos(33^\circ)$	0,85	0,84	$\tan(33^\circ)$	0,7	0,65	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>gemessen</th> <th>TR</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\sin(11^\circ)</math></td> <td>0,2</td> <td>0,19</td> </tr> <tr> <td><math>\cos(11^\circ)</math></td> <td>0,97</td> <td>0,98</td> </tr> <tr> <td><math>\tan(11^\circ)</math></td> <td>0,2</td> <td>0,19</td> </tr> </tbody> </table>		gemessen	TR	$\sin(11^\circ)$	0,2	0,19	$\cos(11^\circ)$	0,97	0,98	$\tan(11^\circ)$	0,2	0,19	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>gemessen</th> <th>TR</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\sin(65^\circ)</math></td> <td>0,9</td> <td>0,91</td> </tr> <tr> <td><math>\cos(65^\circ)</math></td> <td>0,4</td> <td>0,42</td> </tr> <tr> <td><math>\tan(65^\circ)</math></td> <td>2,1</td> <td>2,14</td> </tr> </tbody> </table>		gemessen	TR	$\sin(65^\circ)$	0,9	0,91	$\cos(65^\circ)$	0,4	0,42	$\tan(65^\circ)$	2,1	2,14	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>gemessen</th> <th>TR</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\sin(27^\circ)</math></td> <td>0,45</td> <td>0,45</td> </tr> <tr> <td><math>\cos(27^\circ)</math></td> <td>0,9</td> <td>0,89</td> </tr> <tr> <td><math>\tan(27^\circ)</math></td> <td>0,5</td> <td>0,51</td> </tr> </tbody> </table>		gemessen	TR	$\sin(27^\circ)$	0,45	0,45	$\cos(27^\circ)$	0,9	0,89	$\tan(27^\circ)$	0,5	0,51
	gemessen	TR																																																																											
$\sin(45^\circ)$	0,7	0,71																																																																											
$\cos(45^\circ)$	0,7	0,71																																																																											
$\tan(45^\circ)$	1	1																																																																											
	gemessen	TR																																																																											
$\sin(60^\circ)$	0,83	0,87																																																																											
$\cos(60^\circ)$	0,5	0,5																																																																											
$\tan(60^\circ)$	1,8	1,73																																																																											
	gemessen	TR																																																																											
$\sin(33^\circ)$	0,55	0,54																																																																											
$\cos(33^\circ)$	0,85	0,84																																																																											
$\tan(33^\circ)$	0,7	0,65																																																																											
	gemessen	TR																																																																											
$\sin(11^\circ)$	0,2	0,19																																																																											
$\cos(11^\circ)$	0,97	0,98																																																																											
$\tan(11^\circ)$	0,2	0,19																																																																											
	gemessen	TR																																																																											
$\sin(65^\circ)$	0,9	0,91																																																																											
$\cos(65^\circ)$	0,4	0,42																																																																											
$\tan(65^\circ)$	2,1	2,14																																																																											
	gemessen	TR																																																																											
$\sin(27^\circ)$	0,45	0,45																																																																											
$\cos(27^\circ)$	0,9	0,89																																																																											
$\tan(27^\circ)$	0,5	0,51																																																																											

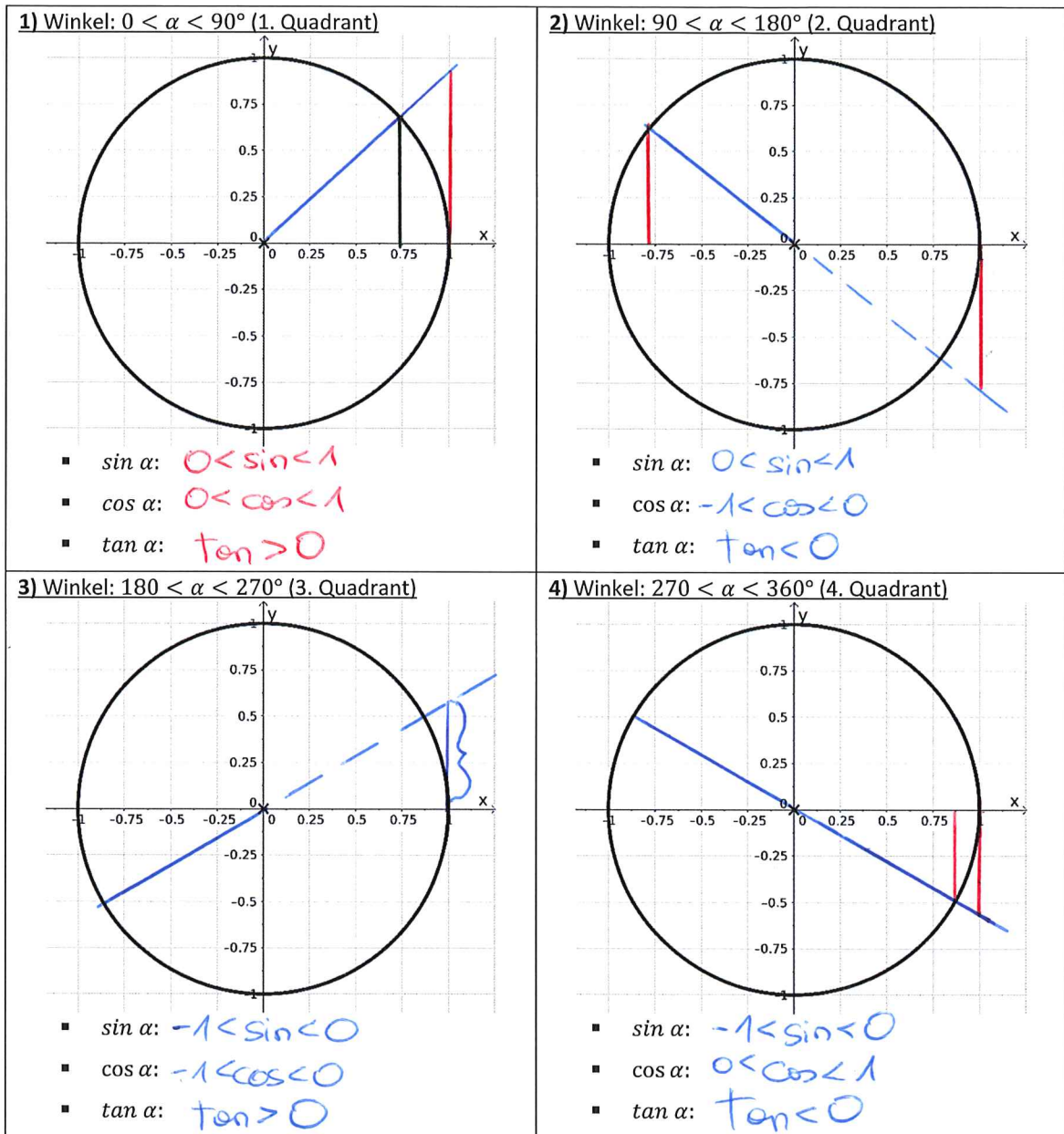


#### 1.4 WINKELFUNKTIONEN FÜR WINKEL ÜBER 90°

[Video 4/13](#)

Im rechtwinkligen Dreieck waren nur Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte von Winkeln zwischen 0° und 90° möglich. Wandert der Punkt P auf der Kreislinie des Einheitskreises entlang, schließt die positiv waagrechte Achse mit dem Radius r aber auch Winkel über 90° ein.

Die Werte für Cosinus und Sinus können wieder als Koordinaten von P abgelesen werden. Für den Tangenswert wird der Kreisradius über den Nullpunkt hinaus verlängert, bis die Verlängerung die Tangente  $x = 1$  schneidet.



**Besondere Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte**

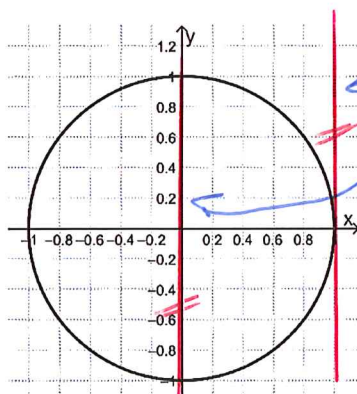
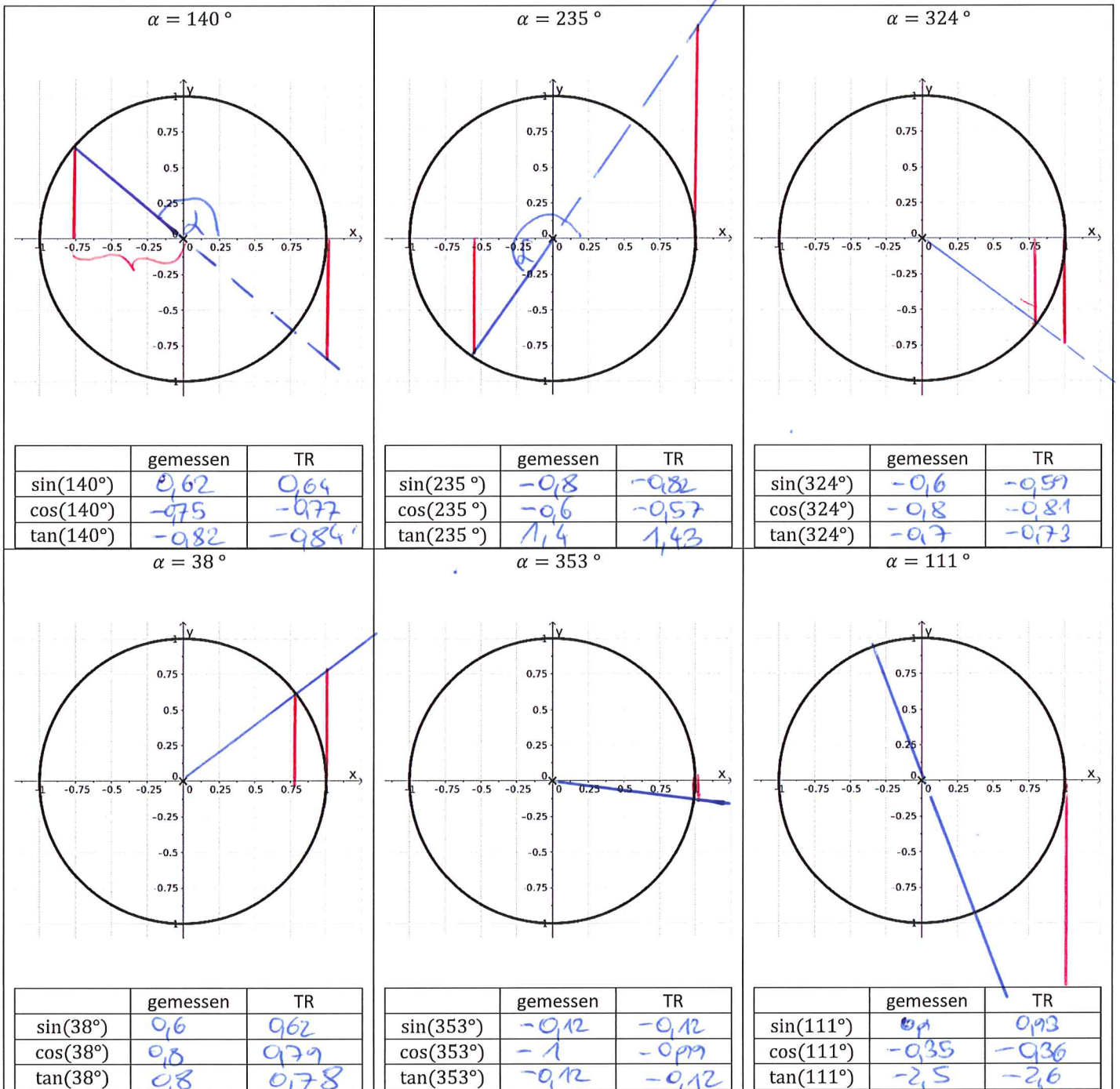
$\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	/	0	/	0

**Welchen Wertebereich nehmen Sinus, Cosinus und Tangens in den Quadranten an?**

	1. Quadrant $0 < \alpha < 90^\circ$	2. Quadrant $90 < \alpha < 180^\circ$	3. Quadrant $180 < \alpha < 270^\circ$	4. Quadrant $270 < \alpha < 360^\circ$
$\sin \alpha$	$0 < \sin < 1$	$0 < \sin < 1$	$-1 < \sin < 0$	$-1 < \sin < 0$
$\cos \alpha$	$0 < \cos < 1$	$-1 < \cos < 0$	$-1 < \cos < 0$	$0 < \cos < 1$
$\tan \alpha$	$\tan > 0$	$\tan < 0$	$\tan > 0$	$\tan < 0$



**Bsp. 3)** Zeichne in den Einheitskreis den gegebenen Winkel. Miss die Werte der drei Winkelfunktionen ab. Überprüfe mit Technologie.



**Bsp. 4)** Begründe anhand einer Skizze, warum es für  $\alpha = 90^\circ$  und  $\alpha = 270^\circ$  keinen Tangenswert gibt.

parallel  
 $\Rightarrow$  kein Schnittpunkt!

### 1.5 WINKELMAß GRAPHISCH UND RECHNERISCH ERMITTELN

Video 5/13



**Bsp. (COSINUS):** Gegeben ist (1)  $\cos \alpha = 0,25$  und (2)  $\cos \alpha = -0,60$ . Welche Winkel haben den angegebenen Cosinuswert? Ermittle graphisch und rechnerisch.

<p><b>Graphische Ermittlung - <math>\cos \alpha = 0,25</math></b></p>	<p><b>Rechnerische Ermittlung - <math>\cos \alpha = 0,25</math></b></p> $\alpha = \cos^{-1}(0,25) \approx \underline{\underline{75,5^\circ}}$ $\alpha_1 = 360^\circ - 75,5^\circ \approx \underline{\underline{284,5^\circ}}$
<p><b>Graphische Ermittlung - <math>\cos \alpha = -0,60</math></b></p>	<p><b>Rechnerische Ermittlung - <math>\cos \alpha = -0,60</math></b></p> $\alpha_1 = \cos^{-1}(-0,6) = \underline{\underline{126,9^\circ}}$ $\alpha_2 = 360^\circ - 126,9^\circ = \underline{\underline{233,1^\circ}}$



**Bsp. (SINUS):** Gegeben ist (1)  $\sin \alpha = 0,25$  und (2)  $\sin \alpha = -0,75$ . Welche Winkel haben den angegebenen Sinuswert? Ermittle graphisch und rechnerisch.

Video 6/13

<p><b>Graphische Ermittlung - <math>\sin \alpha = 0,25</math></b></p>	<p><b>Rechnerische Ermittlung - <math>\sin \alpha = 0,25</math></b></p> $\alpha_1 = \sin^{-1}(0,25) \approx \underline{\underline{14,5^\circ}}$ $\alpha_2 = 180^\circ - 14,5^\circ \approx \underline{\underline{165,5^\circ}}$
<p><b>Graphische Ermittlung - <math>\sin \alpha = -0,75</math></b></p>	<p><b>Rechnerische Ermittlung - <math>\sin \alpha = -0,75</math></b></p> $\sin^{-1}(-0,75) \approx -48,59^\circ$ $\alpha_2 = 360^\circ - 48,59^\circ \approx \underline{\underline{311,4^\circ}}$ $\alpha_1 = 180^\circ + 48,6^\circ \approx \underline{\underline{228,6^\circ}}$

Bsp. (TANGENS): Gegeben ist (1)  $\tan \alpha = 0,75$  und (2)  $\tan \alpha = -0,25$ . Welche Winkel haben den angegebenen Tangenswert? Ermittle graphisch und rechnerisch.

Video 7/13



<p><b>Graphische Ermittlung - <math>\tan \alpha = 0,75</math></b></p>	<p><b>Rechnerische Ermittlung - <math>\tan \alpha = 0,75</math></b></p> $\alpha_1 = \tan^{-1}(0,75) \approx \underline{\underline{36,9^\circ}}$ $\alpha_2 = 180^\circ + \alpha_1 \approx \underline{\underline{216,9^\circ}}$
<p><b>Graphische Ermittlung - <math>\tan \alpha = -0,25</math></b></p>	<p><b>Rechnerische Ermittlung - <math>\tan \alpha = -0,25</math></b></p> $\alpha_1' = \tan^{-1}(-0,25) \approx -14,03^\circ$ $\alpha_1 = 180^\circ - 14,03^\circ \approx \underline{\underline{165,96^\circ}}$ $\alpha_2 = 360^\circ - 14,03^\circ \approx \underline{\underline{345,96^\circ}}$

**1.6 RECHNERISCHE ERMITTLUNG DER WINKELFUNKTIONEN**

Cosinus

1) Positive Cosinuswerte ( $0 < \cos \alpha < 1$ )

$$\alpha_1 = \cos^{-1}(\dots)$$

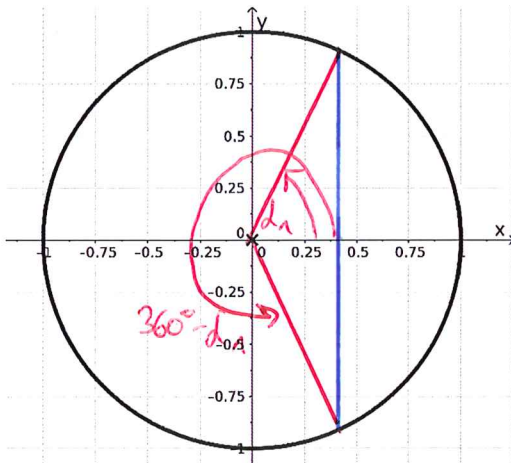
$$\alpha_2 = 360^\circ - \alpha_1$$

Beispiel:

$$\cos \alpha = 0,4$$

$$\alpha_1 = \cos^{-1}(0,4) = 66^\circ$$

$$\text{Symmetrie: } \alpha_2 = 360^\circ - 66^\circ = 294^\circ$$



2) Negative Cosinuswerte ( $-1 < \cos \alpha < 0$ )

$$\alpha_1 = \cos^{-1}(\dots)$$

$$\alpha_2 = 360^\circ - \alpha_1$$

Beispiel:

$$\cos \alpha = -0,60$$

$$\alpha_1 = \cos^{-1}(-0,6) = 126,87^\circ$$

$$\text{Symmetrie: } \alpha_2 = 360^\circ - 126,87^\circ = 233,13^\circ$$

