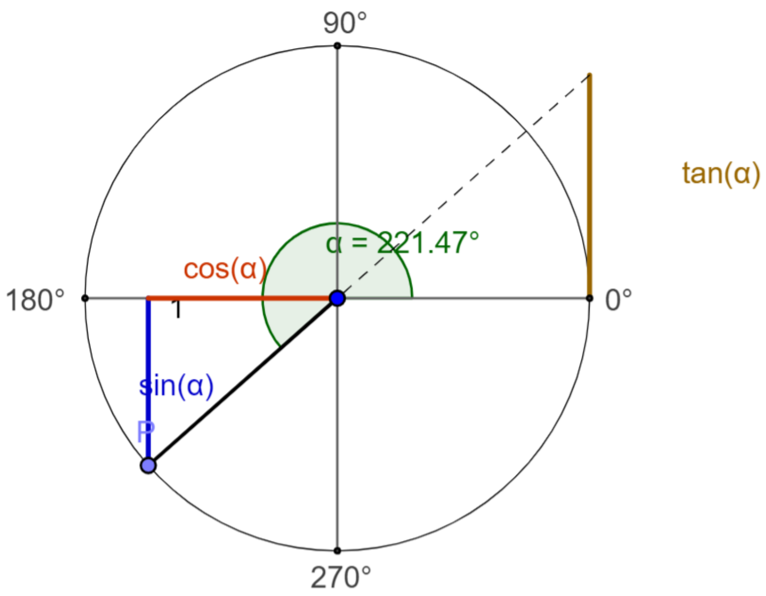
AG4.2 – Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

Maturaskript AHS (8 Seiten)

Grundkompetenz:

- **AG4.2** Definitionen von Sinus und Cosinus für Winkel größer als 90° kennen und einsetzen können



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. πegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

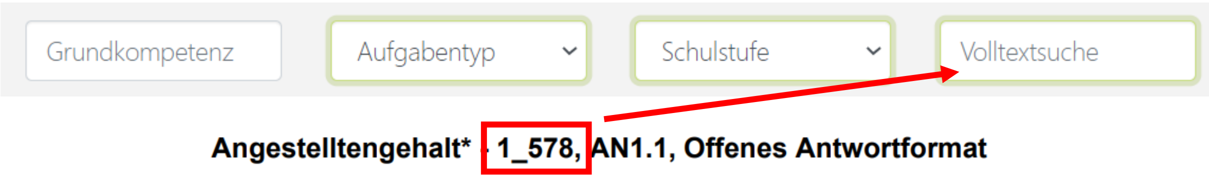
Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M

2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

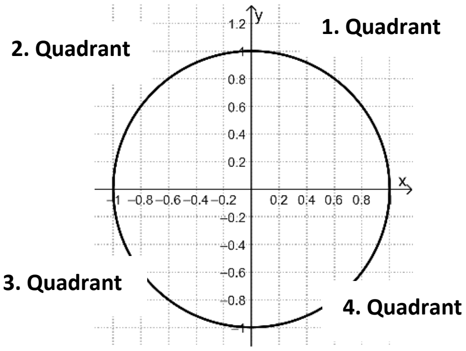
Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

AG4.2 Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

[Video 1](#)

1. Winkelfunktionen für beliebige Dreiecke



1.1 Der Einheitskreis

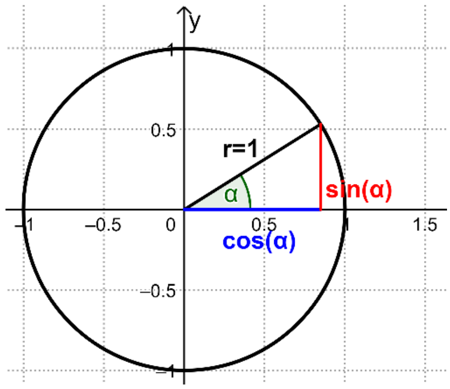
- Ein **Kreis** mit dem **Radius 1** wird **Einheitskreis** genannt.
- Als **Mittelpunkt** wird der **Ursprung** verwendet.
- **Punkte** der **Kreislinie** liegen entweder auf den **Koordinatenachsen** oder in einem der **vier Quadranten**.

[Video 2](#)

1.2 Cosinus und Sinus am Einheitskreis

Bis jetzt sind die Winkelfunktionen nur für **spitze Winkel**, d.h. Winkel zwischen 0° und 90°, im **rechtwinkligen Dreieck** betrachtet worden. Im Folgenden werden die Winkelfunktionen auch für Winkel **größer als 90°** beschrieben: dazu wird der **Einheitskreis** verwendet.

Zu jedem Punkt P auf der Kreislinie lässt sich im Einheitskreis ein rechtwinkliges Dreieck mit dem **Kreisradius** $\boldsymbol{r = 1}$ als **Hypotenuse** und den **Koordinatenstrecken x und y** als **Katheten** angeben.



Die **Hypotenuse** schließt mit der **x-Achse** den **Winkel** $\boldsymbol{\alpha}$ ein. Nach der Definition von Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck ergeben sich für die Koordinaten des Punktes $P = (x|y)$ folgende Beziehungen:

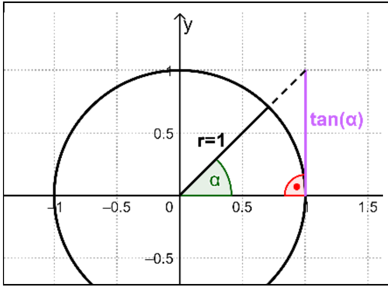
$$x = \cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{Ankathete}{1} \quad \dots\ waagrechte\ Strecke\ \ (= \boldsymbol{COSINUS})$$

$$y = \sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{Gegenkathete}{1} \quad \dots\ senkrechte\ Strecke\ \ (= \boldsymbol{SINUS})$$

<u>Für einen Punkt P gilt:</u> $P = (x|y) = (\cos(\alpha)|\sin(\alpha))$

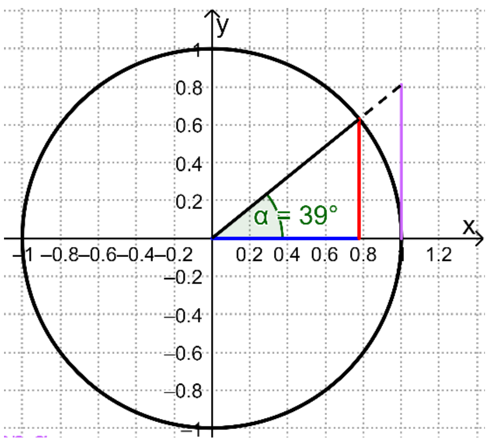
[Video 3](#)

1.3 Tangens am Einheitskreis



Im Punkt (1|0) des Einheitskreises wird eine zur zweiten Achse **parallele Tangente** gelegt und der **Kreisradius** über P hinaus **verlängert**. Die Länge der Strecke von (1|0) bis zum Schnittpunkt der verlängerten Hypotenuse mit der Tangente ist der **<u>Tangenswert</u>** des Winkels α:

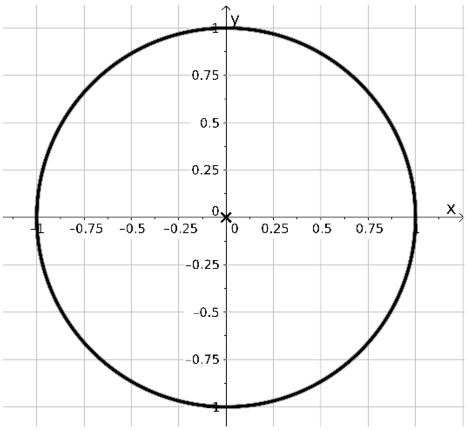
$$\boldsymbol{\tan(\alpha)} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{Gegenkathete}{1} = Gegenkathete$$



Bsp. 1) Gegeben ist der Einheitskreis. Welche Streckenlängen entsprechen dem Cosinus-, Sinus- und Tangenswert des Winkels? Markiere die Strecken mit unterschiedlichen Farben und bestimme die Werte.

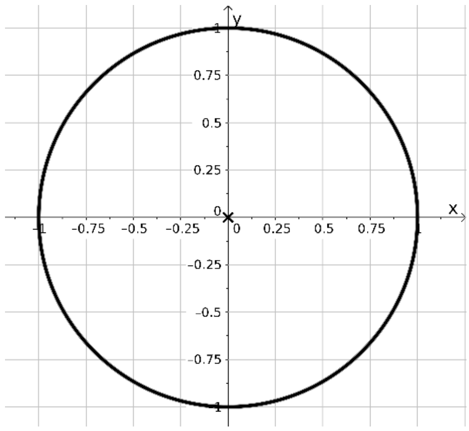
Bsp. 2) Zeichne in den **Einheitskreis** den gegebenen Winkel. **Miss** die **Werte** der drei **Winkelfunktionen** ab. Überprüfe mit Technologie.

$\alpha = 45\,°$



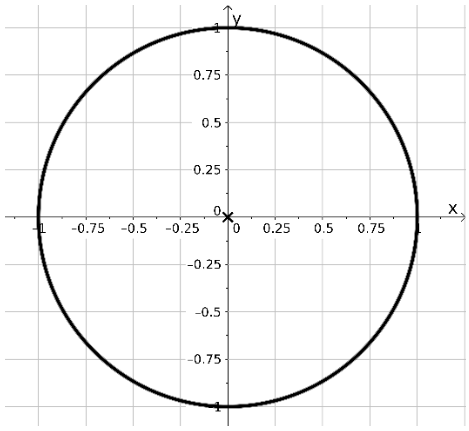
	gemessen	TR
$\sin(45°)$		
$\cos(45°)$		
$\tan(45°)$		

$\alpha = 60\,°$



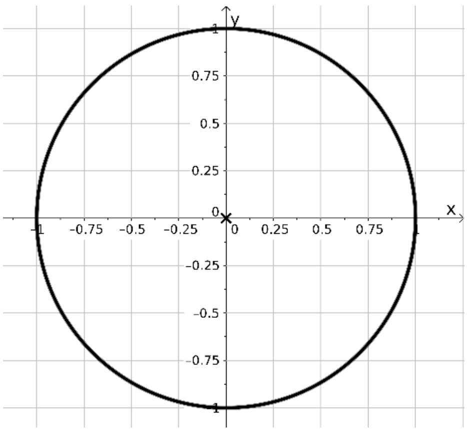
	gemessen	TR
$\sin(60°)$		
$\cos(60°)$		
$\tan(60°)$		

$\alpha = 33\,°$



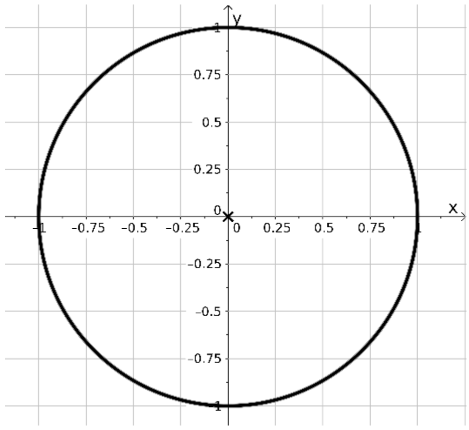
	gemessen	TR
$\sin(33°)$		
$\cos(33°)$		
$\tan(33°)$		

$\alpha = 11\,°$



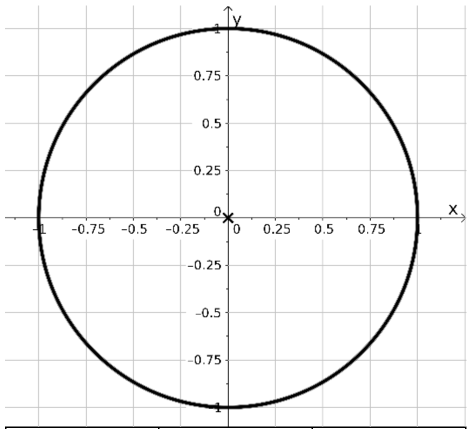
	gemessen	TR
$\sin(11°)$		
$\cos(11°)$		
$\tan(11°)$		

$\alpha = 65\,°$



	gemessen	TR
$\sin(65°)$		
$\cos(65°)$		
$\tan(65)$		

$\alpha = 27\,°$



	gemessen	TR
$\sin(27°)$		
$\cos(27°)$		
$\tan(27°)$		

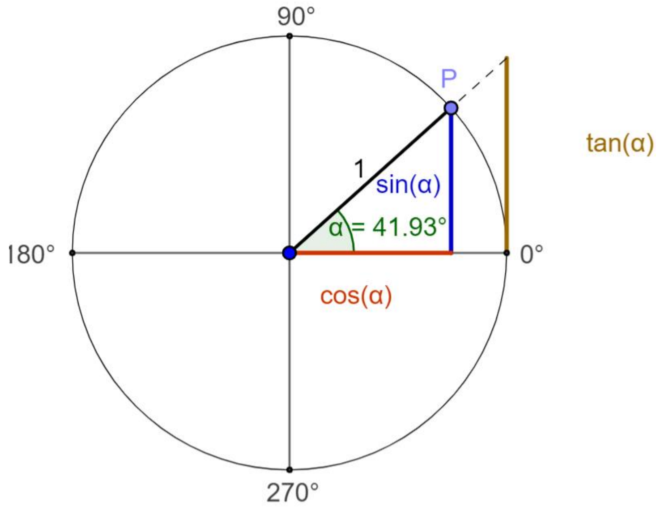
1.4 Winkelfunktionen für Winkel über $90°$

Video 4

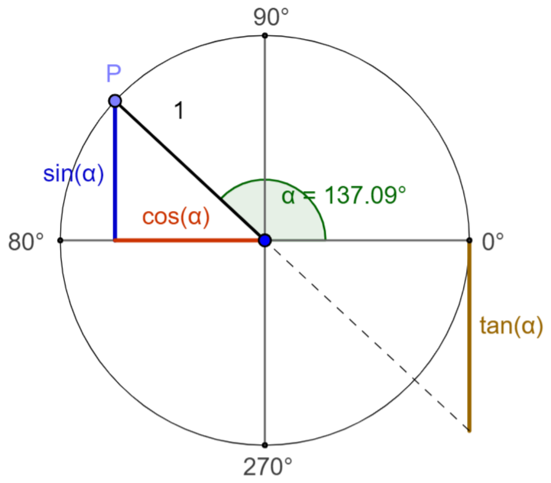
Im rechtwinkligen Dreieck waren nur Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte von Winkeln zwischen 0° und 90° möglich. Wandert der Punkt P auf der Kreislinie des Einheitskreises entlang, schließt die positiv waagrechte Achse mit dem Radius r aber auch Winkel über 90° ein.

Die Werte für Cosinus und Sinus können wieder als Koordinaten von P abgelesen werden. Für den Tangenswert wird der Kreisradius über den Nullpunkt hinaus verlängert, bis die Verlängerung die Tangente $x = 1$ schneidet.

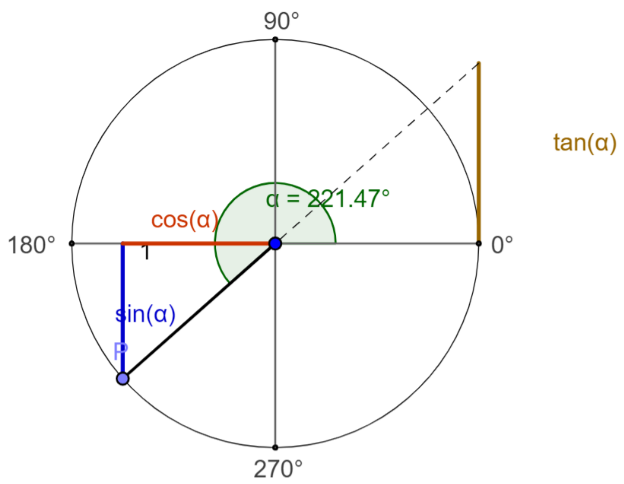
1) Winkel: $0 < \alpha < 90°$ (1. Quadrant)



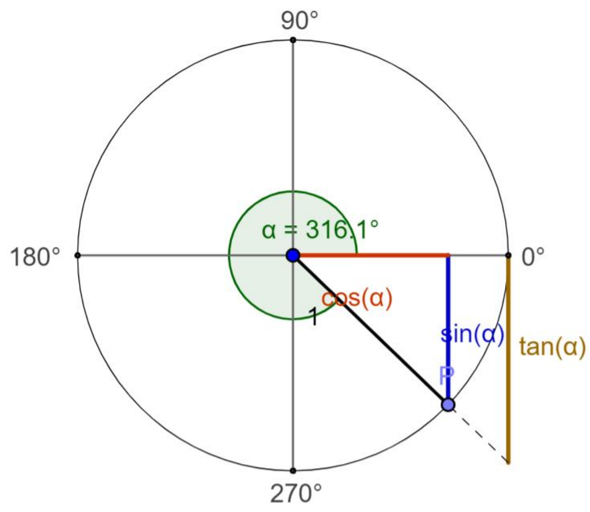
2) Winkel: $90 < \alpha < 180°$ (2. Quadrant)



3) Winkel: $180 < \alpha < 270°$ (3. Quadrant)



4) Winkel: $270 < \alpha < 360°$ (4. Quadrant)



Besondere Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte

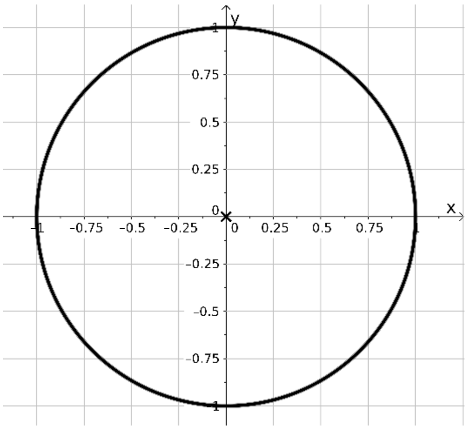
α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					

Welchen Wertebereich nehmen Sinus, Cosinus und Tangens in den Quadranten an?

	1. Quadrant $0 < \alpha < 90°$	**2. Quadrant** $90 < \alpha < 180°$	**3. Quadrant** $180 < \alpha < 270°$	**4. Quadrant** $270 < \alpha < 360°$
$\sin\alpha$				
$\cos\alpha$				
$\tan\alpha$				

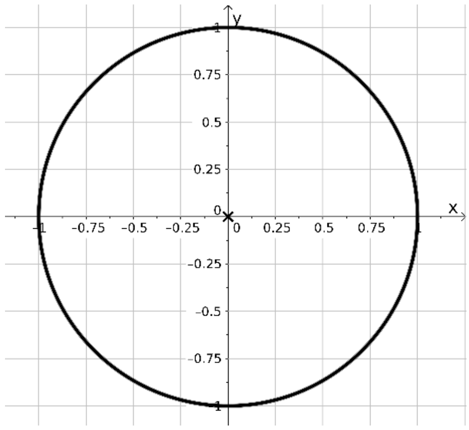
Bsp. 3) Zeichne in den **Einheitskreis** den gegebenen Winkel. Miss die **Werte** der **drei Winkelfunktionen** ab. Überprüfe mit Technologie.

$\alpha = 140\,°$



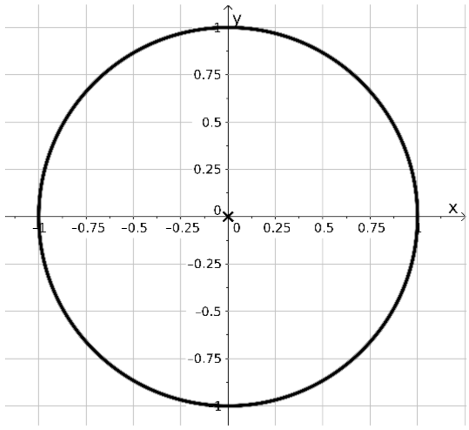
	gemessen	TR
$\sin(140°)$		
$\cos(140°)$		
$\tan(140°)$		

$\alpha = 235\,°$



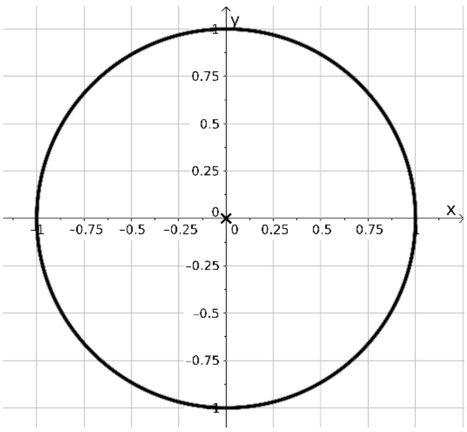
	gemessen	TR
$\sin(235\,°)$		
$\cos(235\,°)$		
$\tan(235\,°)$		

$\alpha = 324\,°$



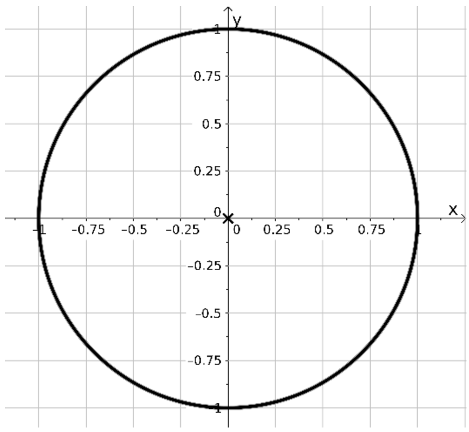
	gemessen	TR
$\sin(324°)$		
$\cos(324°)$		
$\tan(324°)$		

$\alpha = 38\,°$



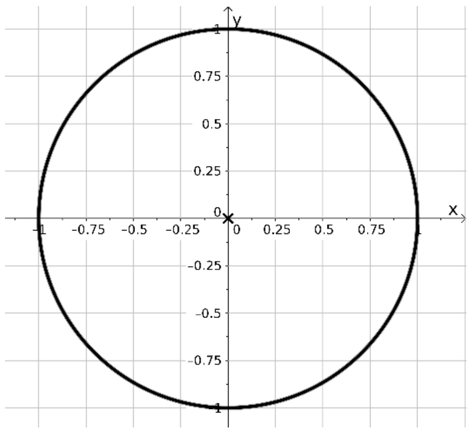
	gemessen	TR
$\sin(38°)$		
$\cos(38°)$		
$\tan(38°)$		

$\alpha = 353\,°$



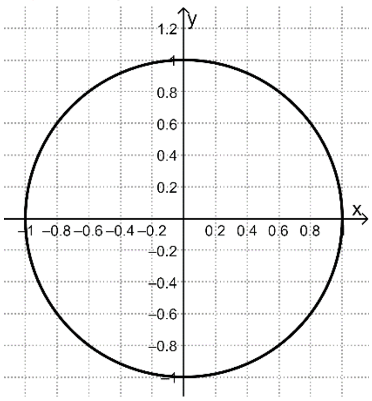
	gemessen	TR
$\sin(353°)$		
$\cos(353°)$		
$\tan(353°)$		

$\alpha = 111\,°$



	gemessen	TR
$\sin(111°)$		
$\cos(111°)$		
$\tan(111°)$		

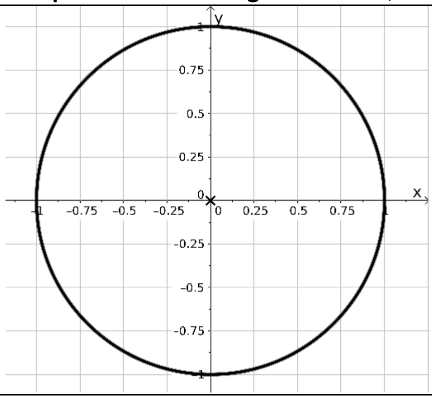
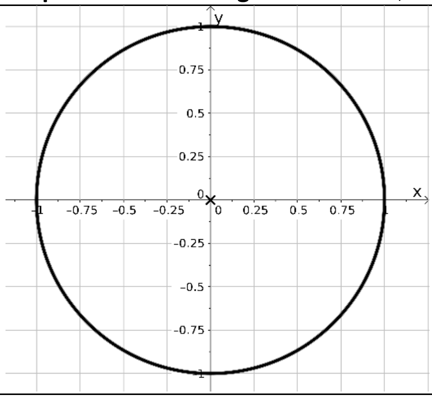
Bsp. 4) Begründe anhand einer Skizze, warum es für $\alpha = 90°$ und $\alpha = 270°$ keinen Tangenswert gibt.



1.5 Winkelmaße graphisch und rechnerisch ermitteln

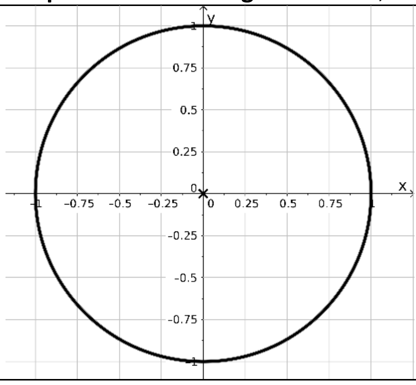
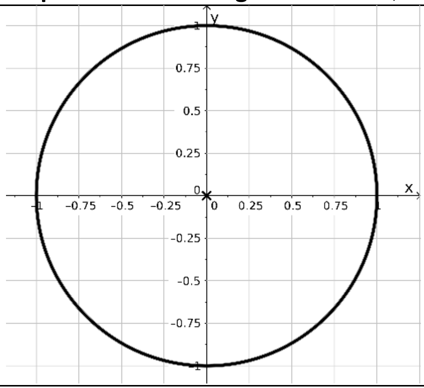
[Video 5]

Bsp. (COSINUS): Gegeben ist (1) $\cos\alpha = 0{,}25$ und (2) $\cos\alpha = -0{,}60$. Welche Winkel haben den angegebenen Cosinuswert? Ermittle graphisch und rechnerisch.

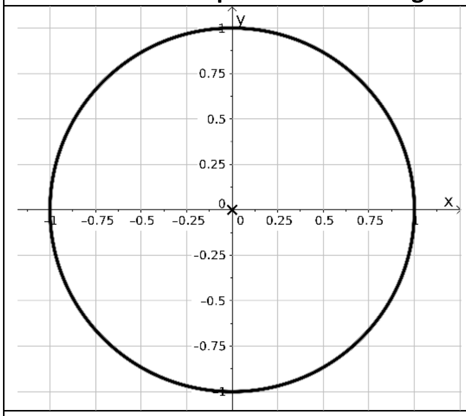
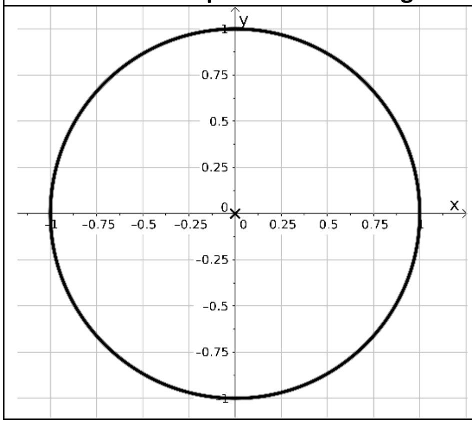
Graphische Ermittlung - $\cos\alpha = 0{,}25$	**Rechnerische Ermittlung** - $\cos\alpha = 0{,}25$
	
Graphische Ermittlung - $\cos\alpha = -0{,}60$	**Rechnerische Ermittlung** - $\cos\alpha = -0{,}60$
	

[Video 6]

Bsp. (SINUS): Gegeben ist (1) $\sin\alpha = 0{,}25$ und (2) $\sin\alpha = -0{,}75$. Welche Winkel haben den angegebenen Sinuswert? Ermittle graphisch und rechnerisch.

Graphische Ermittlung - $\sin\alpha = 0{,}25$	**Rechnerische Ermittlung** - $\sin\alpha = 0{,}25$
	
Graphische Ermittlung - $\sin\alpha = -0{,}75$	**Rechnerische Ermittlung** - $\sin\alpha = -0{,}75$
	

Bsp. (TANGENS): Gegeben ist (1) $\tan \alpha = 0{,}75$ und (2) $\tan \alpha = -0{,}25$. Welche Winkel haben den angegebenen Tangenswert? Ermittle graphisch und rechnerisch. Video 7

Graphische Ermittlung - $\tan \alpha = 0{,}75$	**Rechnerische Ermittlung** - $\tan \alpha = 0{,}75$
	
Graphische Ermittlung - $\tan \alpha = -0{,}25$	**Rechnerische Ermittlung** - $\tan \alpha = -0{,}25$
	

Intervalle* - 1_1184, AG4.2, 1 aus 6

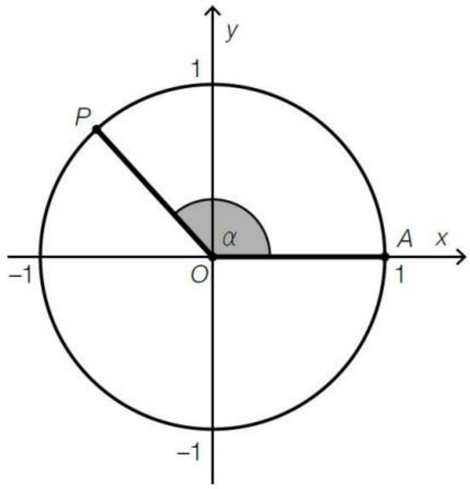
Gegeben sind sechs verschiedene Intervalle.
Für alle Winkel α aus einem dieser Intervalle gilt: $\sin(\alpha) \geq 0$ und $\sin(\alpha) \neq 1$.

Kreuzen Sie das zutreffende Intervall an. *[1 aus 6]*

[270°; 360°)	☐
[90°; 180°]	☐
(0°; 180°)	☐
[0°; 90°)	☐
(90°; 270°]	☐
[180°; 270°]	☐

Sinus und Cosinus* - 1_619, AG4.2, Konstruktionsformat

Die nachstehende Abbildung zeigt einen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius 1. Die Punkte $A = (1|0)$ und P liegen auf der Kreislinie. Der eingezeichnete Winkel α wird vom Schenkel OA zum Schenkel OP gegen den Uhrzeigersinn gemessen.



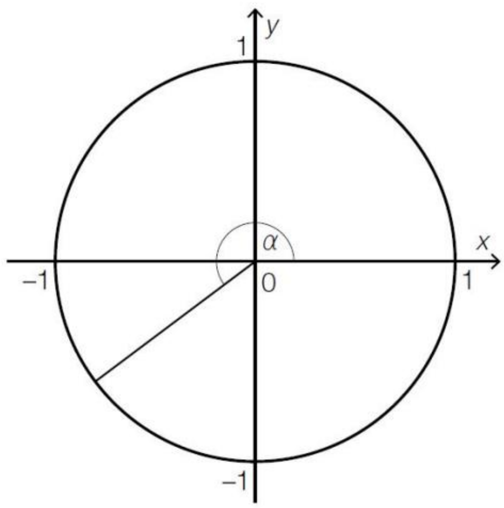
Ein Punkt Q auf der Kreislinie soll in analoger Weise einen Winkel β festlegen, für den folgende Beziehungen gelten:
$\sin(\beta) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(\beta) = \cos(\alpha)$
Zeichnen Sie in der oben stehenden Abbildung den Punkt Q ein!

Winkel bestimmen* - 1_512, AG4.2, Offenes Antwortformat

Für einen Winkel $\alpha \in [0°; 360°)$ gilt:
$\sin(\alpha) = 0{,}4$ und $\cos(\alpha) < 0$
Berechnen Sie den Winkel α!

Winkel im Einheitskreis* - 1_595, AG4.2, Konstruktionsformat

In der nachstehenden Grafik ist ein Winkel α im Einheitskreis dargestellt.
Zeichnen Sie in der Grafik denjenigen Winkel β aus dem Intervall $[0°; 360°]$ mit $\beta \neq \alpha$ ein, für den $\cos(\beta) = \cos(\alpha)$ gilt!



Winkel mit gleichem Sinuswert* - 1_715, AG4.2, 1 aus 6

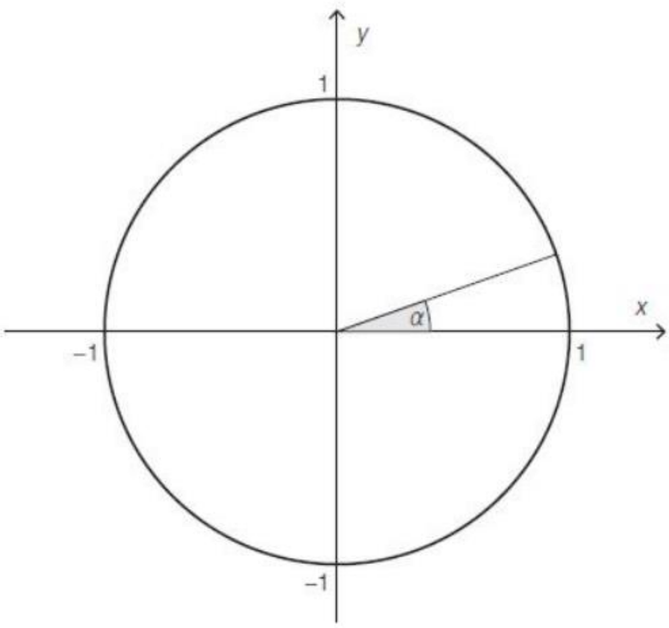
Gegeben sei eine reelle Zahl c mit $0 < c < 1$. Für die zwei unterschiedlichen Winkel α und β soll gelten: $\sin(\alpha) = \sin(\beta) = c$.
Dabei soll α ein spitzer Winkel und β ein Winkel aus dem Intervall (0°; 360°) sein.
Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln α und β?
Kreuzen Sie die zutreffende Beziehung an.

$\alpha + \beta = 90°$	☐
$\alpha + \beta = 180°$	☐
$\alpha + \beta = 270°$	☐
$\alpha + \beta = 360°$	☐
$\beta - \alpha = 270°$	☐
$\beta - \alpha = 180°$	☐

Baumhaus (2_095)

1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

In der nachstehenden Abbildung ist ein Winkel α im Einheitskreis dargestellt.



2) Zeichnen Sie im obigen Einheitskreis denjenigen Winkel β ein, für den gilt: $\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ mit $\beta \neq \alpha$ und $0° \leq \beta \leq 360°$.