LÖSUNGEN

Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

1. Eigenschaften (rechtwinkliges Dreieck)

- Ein Dreieck, in dem ein Winkel 90° hat, wird **rechtwinkliges Dreieck** bezeichnet.
- Die Seiten, die den rechten Winkel einschließen, heißen **Katheten**. Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, heißt **Hypotenuse**. Die Hypotenuse ist die längste Seite des rechtwinkligen Dreiecks.

Satz des Pythagoras:

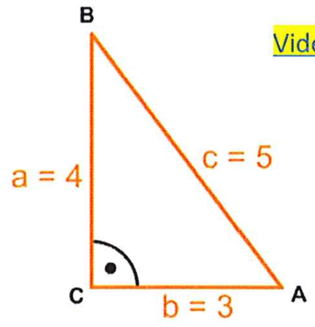
In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: Die **Summe** der **Quadrate** der **Katheten** ist gleich dem **Quadrat** der **Hypotenuse**.

$$Kathete^2 + Kathete^2 = Hypotenuse^2$$

Flächeninhalt (rechtwinkliges Dreieck):

$$A = \frac{Kathete \cdot Kathete}{2}$$

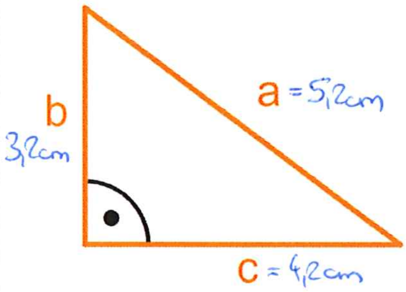
Video 1/6



- **Katheten**: Seiten a und b
- **Hypotenuse**: Seite c
- **Satz des Pythagoras**: $a^2 + b^2 = c^2$
- **Flächeninhalt**:

$$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6\ cm^2$$

Bsp. 1) Gib an, welche Seiten den Katheten bzw. der Hypotenuse entsprechen. Miss die beiden Katheten ab und berechne mit Hilfe des Satz des Pythagoras näherungsweise die Länge der Hypotenuse. Bestimme den Flächeninhalt.



Katheten: b, c

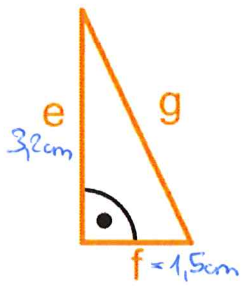
Hypotenuse: a

Satz des Pythagoras: $b^2 + c^2 = a^2$

$a = \sqrt{3{,}2^2 + 4{,}2^2} \approx 5{,}3cm$

Flächeninhalt:

$A = \frac{3{,}2 \cdot 4{,}2}{2} = \underline{\underline{6{,}7cm^2}}$



Katheten: e, f

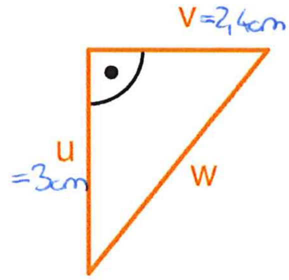
Hypotenuse: g

Satz des Pythagoras: $e^2 + f^2 = g^2$

$g = \sqrt{3{,}2^2 + 1{,}5^2} \approx 3{,}5cm$

Flächeninhalt:

$A = \frac{3{,}2 \cdot 1{,}5}{2} = \underline{\underline{2{,}4cm^2}}$



Katheten: u, v

Hypotenuse: w

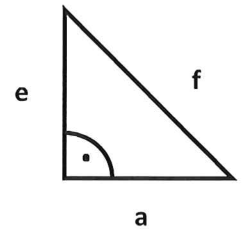
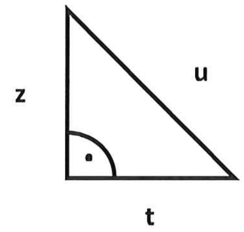
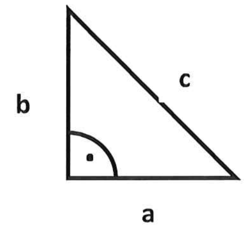
Satz des Pythagoras: $u^2 + v^2 = w^2$

$w = \sqrt{2{,}4^2 + 3^2} \approx 3{,}8cm$

Flächeninhalt:

$A = \frac{2{,}4 \cdot 3}{2} = \underline{\underline{3{,}6cm^2}}$

Bsp. 2) Stelle den **pythagoräischen Lehrsatz** auf und drücke jede Variable durch die andere aus.

		
Pythagoräischer Lehrsatz: $a^2+e^2=f^2$	Pythagoräischer Lehrsatz: $z^2+t^2=u^2$	Pythagoräischer Lehrsatz: $a^2+b^2=c^2$
$a=\sqrt{f^2-e^2}$	$u=\sqrt{z^2+t^2}$	$a=\sqrt{c^2-b^2}$
$e=\sqrt{f^2-a^2}$	$z=\sqrt{u^2-t^2}$	$b=\sqrt{c^2-a^2}$
$f=\sqrt{e^2+a^2}$	$t=\sqrt{u^2-z^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$

Bsp. 3) Berechne zuerst die fehlenden Seite des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten m und n und der Hypotenuse x. Berechne anschließend den Flächeninhalt des Dreiecks.

a. $m=9; n=12$	**b.** $m=5; x=13$	**c.** $n=14{,}4\,; x=19{,}4$
1 $x=\sqrt{m^2+n^2}$	1 $n=\sqrt{x^2-m^2}$	1 $m=\sqrt{x^2-n^2}$
$x=\sqrt{9^2+12^2}=\underline{\underline{15}}$	$n=\sqrt{13^2-5^2}=\underline{\underline{12}}$	$m=\sqrt{19{,}4^2-14{,}4^2}=\underline{\underline{13}}$
2 $A=\frac{9\cdot 12}{2}=\underline{\underline{54E^2}}$	2 $A=\frac{5\cdot 12}{2}=\underline{\underline{30E^2}}$	2 $A=\frac{13\cdot 14{,}4}{2}=\underline{\underline{93{,}6E^2}}$

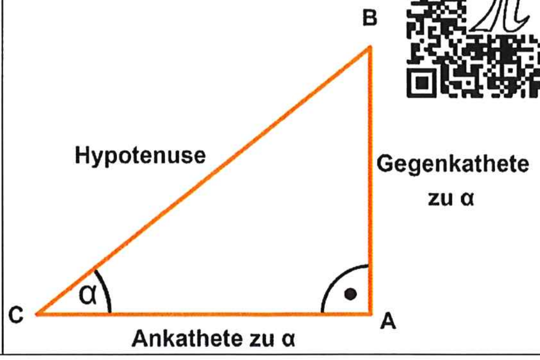
2. Sinus, Cosinus, Tangens für spitze Winkel (Winkelfunktion)

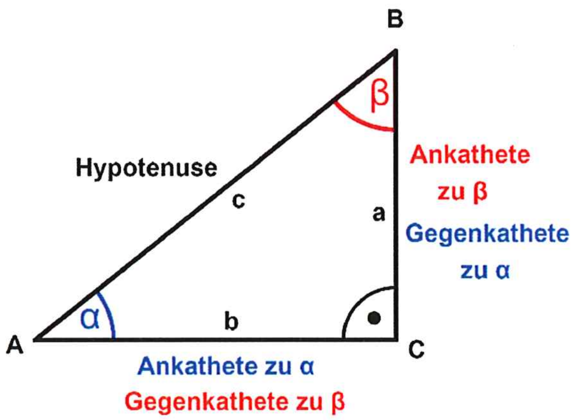
Video 2/6

Hypotenuse: **Längste** Seite (Sie ist IMMER **gegenüber** vom **rechten Winkel**)

Die beiden kürzeren Seiten heißen Katheten.
Ausgehend vom Winkel α (Skizze) können die beiden Katheten folgendermaßen unterschieden werden:

- **Gegenkathete GK** liegt gegenüber von α (=gegenüberliegende Kathete)
- **Ankathete AK** liegt an α an (=anliegende Kathete)





Wichtig: Beachte, dass es immer vom **ausgehenden Winkel** abhängt, welche Kathete die Gegenkathete (gegenüber dem Winkel) und welche Kathete die Ankathete (dem Winkel anliegend) ist!

- Die **Seite a** ist zum Winkel α die Gegenkathete UND zum Winkel β die Ankathete.
- Die **Seite b** ist zum Winkel α die Ankathete UND zum Winkel β die Gegenkathete.
- Die **Seite c** ist und bleibt immer die Hypotenuse.

Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Der **Sinus** eines Winkels α ist definiert als das Verhältnis von GK zu H.	$\sin\alpha = \frac{GK}{H}$
Der **Cosinus** eines Winkels α ist definiert als das Verhältnis von AK zu H.	$\cos\alpha = \frac{AK}{H}$
Der **Tangens** eines Winkels α ist definiert als das Verhältnis von GK zu AK.	$\tan\alpha = \frac{GK}{AK}$

!! Diese Formeln gelten nur im rechtwinkligen Dreieck !!

Video 3/6

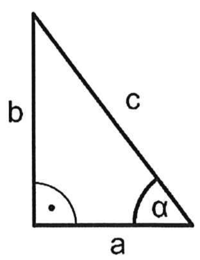
Bemerkungen

Bemerkung 1: Der Quotient von Gegenkathete und Hypotenuse entspricht dem **Sinus von α**, aber **nicht dem Winkel α**!

$$\alpha \neq \sin\alpha$$

Um den Winkel α über $\sin\alpha$ zu bekommen, musst du die **Umkehrfunktion** $\sin^{-1}(\frac{GK}{H})$ anwenden.

Beispiel: geg.: $b = 4\ cm;\ c = 6\ cm$ – ges.: Winkel α



$$\sin\alpha = \frac{GK}{H} = \frac{b}{c} = \frac{4}{6}$$

$$\sin\alpha = \frac{4}{6} \quad |\sin^{-1}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) = 41{,}81°$$

Umkehroperationen:

- **Sinus**: $arcsin$ bzw. $\sin^{-1}$
- **Cosinus**: $arccos$ bzw. $\cos^{-1}$
- **Tangens**: $arctan$ bzw. $\tan^{-1}$

Beispiel:

$$\sin(60°) = 0{,}866..$$

$$\sin^{-1}(0{,}866..) = 60°$$

Bemerkung 2: Winkel können in verschiedenen Maßen (Grad, Bogenmaß, Neugrad) gemessen werden. Achte also beim Technologieeinsatz darauf, dass das **Gradmaß** eingestellt ist.

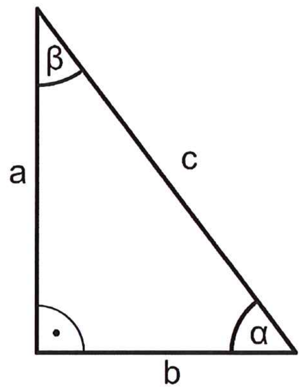
Bsp. 4) Berechne die Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte mit dem Taschenrechner.

	56°	33°	68°	5°	17°	67°	15°
sin	0,83	0,54	0,93	0,09	0,29	0,92	0,26
cos	0,56	0,84	0,37	0,996	0,96	0,39	0,97
tan	1,48	0,65	2,48	0,09	0,31	2,36	0,27

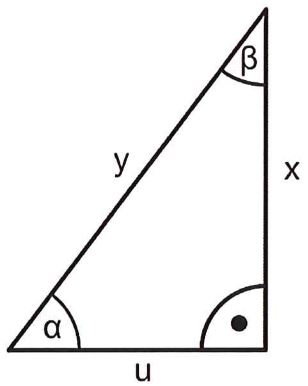
Bsp. 5) Berechne die Größe des Winkels α.

a. $\sin\alpha = 0{,}9$ $\alpha = \sin^{-1}(0{,}9) \approx \underline{\underline{64{,}2^\circ}}$	b. $\tan\alpha = 0{,}42$ $\alpha = \tan^{-1}(0{,}42) \approx \underline{\underline{22{,}8^\circ}}$	c. $\cos\alpha = 0{,}87$ $\alpha = \cos^{-1}(0{,}87) \approx \underline{\underline{29{,}5^\circ}}$	d. $\sin\alpha = 0{,}12$ $\alpha = \sin^{-1}(0{,}12) \approx \underline{\underline{6{,}89^\circ}}$
e. $\cos\alpha = -0{,}5$ $\alpha = \cos^{-1}(-0{,}5) \approx \underline{\underline{60^\circ}}$	f. $\sin\alpha = 0{,}5$ $\alpha = \sin^{-1}(0{,}5) = \underline{\underline{30^\circ}}$	g. $\tan\alpha = 10{,}31$ $\alpha = \tan^{-1}(10{,}31) \approx \underline{\underline{84{,}5^\circ}}$	h. $\cos\alpha = 0{,}8$ $\alpha = \cos^{-1}(0{,}8) \approx \underline{\underline{36{,}87^\circ}}$

Bsp. 6) Kreuze die richtigen Aussagen an.

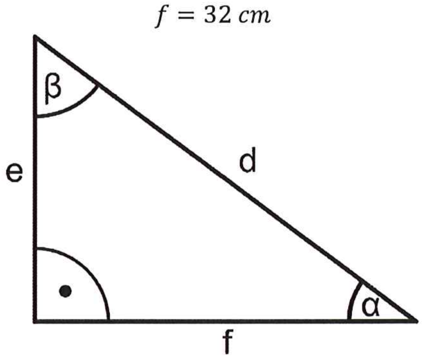


$\sin(\beta) = \frac{b}{a}$	O
$\tan(\beta) = \frac{b}{a}$	X
$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)$	O
$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	O
$\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$	O
$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{c}{b}\right)$	O



$\sin^{-1}\left(\frac{x}{u}\right) = \alpha$	O
$\tan(\alpha) = \frac{u}{x}$	O
$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{u}{y}\right)$	X
$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{u}{x}\right)$	X
$\cos(\beta) = \frac{y}{x}$	O
$\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \beta$	O

Bsp. 7) Bestimme den Sinus-, Cosinus- und Tangenswert für die Winkel α und β des rechtwinkligen Dreiecks. Bestimme anschließend durch die Umkehrfunktionen jeweils den Winkel α bzw. β.

	Winkel α	**Winkel β**
$d = 40\ cm$ $e = 24\ cm$ $f = 32\ cm$ 	▪ $\boldsymbol{sin(\alpha)} = \frac{e}{d} = \frac{24}{40} = 0{,}6$ ▪ $\boldsymbol{cos(\alpha)} = \frac{f}{d} = \frac{32}{40} = 0{,}8$ ▪ $\boldsymbol{tan(\alpha)} = \frac{e}{f} = \frac{24}{32} = 0{,}75$ ▪ $\alpha = \left.\begin{matrix}\sin^{-1}(0{,}6)\\ \cos^{-1}(0{,}8)\\ \tan^{-1}(0{,}75)\end{matrix}\right\} \approx 36{,}87^\circ$	▪ $\boldsymbol{sin(\beta)} = \frac{f}{d} = \frac{32}{40} = 0{,}8$ ▪ $\boldsymbol{cos(\beta)} = \frac{e}{d} = \frac{24}{40} = 0{,}6$ ▪ $\boldsymbol{tan(\beta)} = \frac{f}{e} = \frac{32}{24} = 1{,}\dot{3}$ ▪ $\beta = \left.\begin{matrix}\sin^{-1}(0{,}8)\\ \cos^{-1}(0{,}6)\\ \tan^{-1}(1{,}3)\end{matrix}\right\} \approx 53{,}13^\circ$

Video 4/6

Bsp. 8) Überlege & **begründe** mit Hilfe der **Länge** der **Katheten** und der **Hypotenuse**.

1. Welche Werte kann der **Sinus** eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck annehmen?

$SIN = \frac{GK}{H}$ $GK < H$ Nenner! $\Rightarrow$ Nenner > Zähler $0 < \sin(\alpha) < 1$

2. Welche Werte kann der **Cosinus** eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck annehmen?

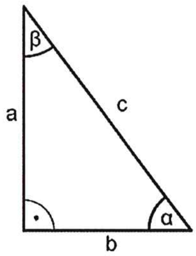
$COS = \frac{AK}{H}$ $AK < H$ Nenner > Zähler $\Rightarrow 0 < \cos(\alpha) < 1$

3. Welche Werte kann der **Tangens** eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck annehmen?

$TAN = \frac{GK}{AK}$ GK kann kürzer, gleich lang oder länger als AK sein

$\Rightarrow TAN(\alpha) > 0$

Video 5/6



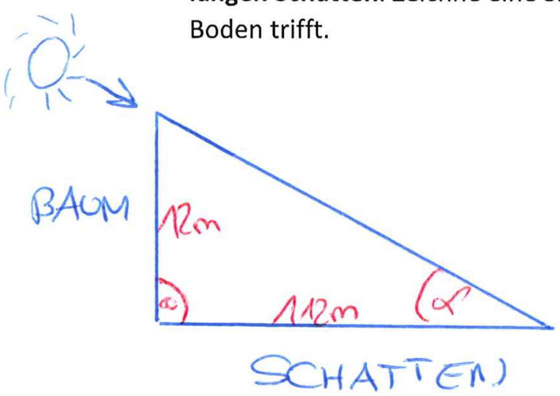
3. Auflösen von rechtwinkligen Dreiecken mittels Winkelfunktionen

Mittels Winkelfunktionen können **fehlende Größen** (Seitenlängen, Winkelmaße) eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hilfe von **Umformungen** berechnet werden.

Bsp. 9) Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den **Winkeln** α *und* β, den **Katheten a** und **b** und der **Hypotenuse c**. Berechne die Größe der fehlenden Winkeln und der fehlenden Seiten.

$\alpha = 40°, a = 4\ cm$	$a = 5\ cm, b = 12\ cm$	$\beta = 30°, a = 9\ cm$
① $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin(\alpha)} \approx 6{,}22cm$ ② $\tan(40°) = \frac{4}{b} \Rightarrow b \approx 4{,}77cm$ ③ $\beta = 90° - \alpha = 50°$	① $c = \sqrt{a^2+b^2} = 13cm$ ② $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(\frac{a}{c}) \approx 22{,}62°$ ③ $\beta = 90° - \alpha = 67{,}38°$	① $\alpha = 90° - 30° = 60°$ ② $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Rightarrow c \approx 10{,}39cm$ ③ $\tan(\beta) = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \tan(\beta) \approx 5{,}2cm$
$a = 24\ cm, c = 25\ cm$	$\alpha = 45°, a = 6\ cm$	$\beta = 80°, c = 5\ cm$
① $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 7cm$ ② $\alpha = \sin^{-1}(\frac{a}{c}) \approx 73{,}74°$ ③ $\beta = 90° - \alpha = 16{,}26°$	① $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{6}{\tan(45)} \approx 6cm$ ② $c = \sqrt{a^2+b^2} \approx 8{,}49cm$ ③ $\beta = 90° - \alpha = 45°$	① $\alpha = 10°$ ② $\sin(\beta) = \frac{b}{c} \Rightarrow b \approx 4{,}92cm$ ③ $\cos(\beta) = \frac{a}{c} \Rightarrow a \approx 0{,}87cm$

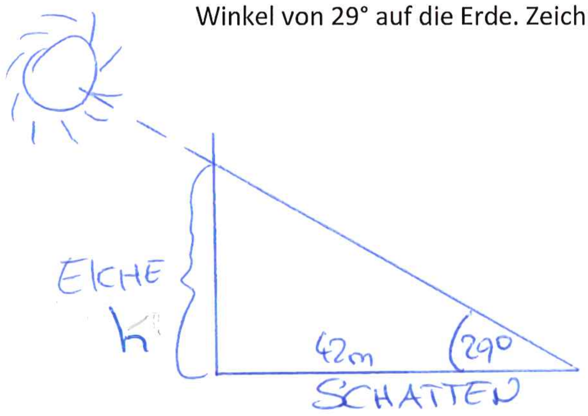
Bsp. 10) Bei tief stehender Abendsonne wirft ein **12m hoher Baum** auf ebener Fläche einen **112m langen Schatten**. Zeichne eine Skizze und berechne den Winkel α, mit dem der Sonnenstrahl auf den Boden trifft.



$\tan(\alpha) = \frac{12}{112} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(\frac{12}{112})$

$\alpha \approx 6{,}12°$

Bsp. 11) Eine **Eiche** wirft einen **42 m langen Schatten**. Die Sonnenstrahlen treffen dabei unter einem Winkel von 29° auf die Erde. Zeichne eine Skizze und berechne die Höhe der Eiche.



$\tan(29°) = \frac{h}{42} \Rightarrow h = 42 \cdot \tan(29°)$

$\Rightarrow \underline{\underline{h \approx 23{,}28\,m}}$

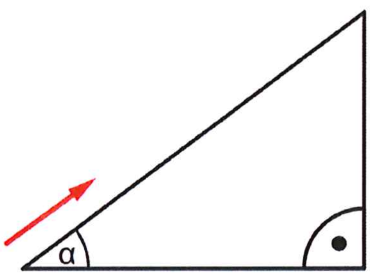
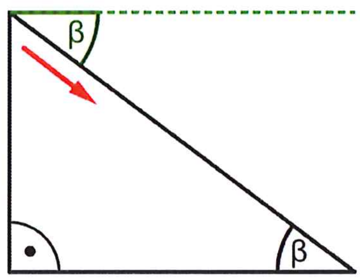
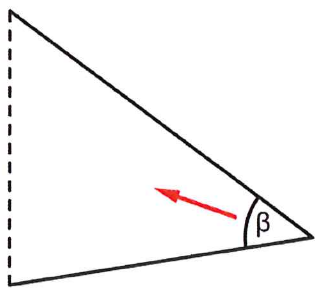
4. Anwendungen (Aufgaben aus der Geometrie)

In vielen geometrischen Figuren und Körpern lassen sich rechtwinklige Dreiecke erkennen und einzeichnen. Zur Berechnung von fehlenden Streckenlängen und Winkeln können wieder die Winkelfunktionen verwendet werden.

5. Anwendungen (Vermessungsaufgaben)

Viele Entfernungs- und Winkelberechnungen im Alltag lassen sich durch das Zurückführen auf rechtwinklige Dreiecke und das Anwenden der Winkelfunktionen leicht durchführen.

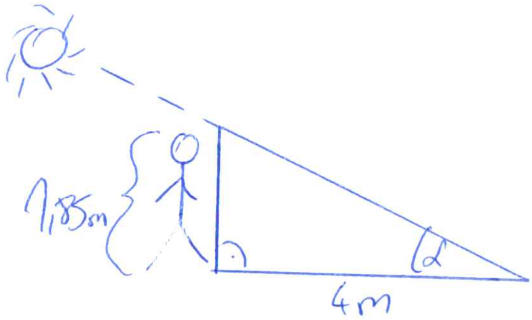
Winkelarten Video 6/6

1) Höhenwinkel: Winkel, der von der Horizontalen nach oben gemessen wird (es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck!) 	**2) Tiefenwinkel:** Winkel, der von der Parallelen zur Horizontalen nach unten gemessen wird (es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck!) 	**3) Sehwinkel**: Winkel, den zwei Sehstrahlen miteinander einschließen (kein rechtwinkliges Dreieck) 

Tipps zum Lösen von Vermessungsaufgaben

- **Mache** eine **Skizze** mit allen gegebenen und gesuchten Größen (nicht zu klein!!)
- Beginne das rechtwinklige Dreieck aufzulösen, von dem du **zwei Bestimmungsstücke** kennst.
- Tiefenwinkel β zu einem Punkt = Höhenwinkel β von diesem Punkt hinunter (siehe **Tiefenwinkel**)

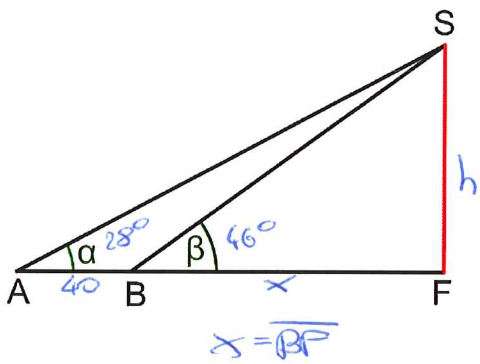
Bsp. 12) Ein Mann ist **1,85 Meter groß** und wirft einen **vier Meter langen Schatten**. Welches Maß hat der Höhenwinkel zur Sonne? (*Mache zuerst eine Skizze*)



$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1{,}85}{4}\right) \approx \underline{\underline{24{,}82^\circ}}$

Bsp. 13) Ein alter Turm steht in einer Ebene. Um seine Höhe zu bestimmen, steckt man in der Ebene eine horizontale Standlinie AB mit der **Länge von 40 Metern** ab, sodass A, B und der Fußpunkt des Turms F in einer Linie liegen. Von A aus misst man zur Turmspitze S den **Höhenwinkel $\alpha = 28°$**, von B aus den **Höhenwinkel $\beta = 46°$**.

Wie hoch ist der Turm, und wie weit ist sein Fußpunkt F von B entfernt?



$\tan(\beta) = \frac{h}{x} \Rightarrow h = \underline{x \cdot \tan(\beta)}$

$\tan(\alpha) = \frac{h}{40+x} \Rightarrow h = \underline{(40+x) \cdot \tan(\alpha)}$

(1) $h = h$

$x \cdot \tan(46°) = (40+x) \cdot \tan(28°)$

$x \cdot \tan(46°) = 40 \cdot \tan(28°) + x \cdot \tan(28°) \quad | -x \cdot \tan(28°)$

$x \cdot \tan(46°) - x \cdot \tan(28°) = 40 \cdot \tan(28°)$

$x \cdot (\tan(46°) - \tan(28°)) = 40 \cdot \tan(28°)$

Entfernung $\overline{BF}$

$x = \frac{40 \cdot \tan(28°)}{\tan(46°) - \tan(28°)} \approx \underline{\underline{42{,}21m}}$

Höhe des Turms

(2) $\tan(\beta) = \frac{h}{x} \Rightarrow h = 42{,}21 \cdot \tan(46°) \approx \underline{\underline{43{,}71m}}$