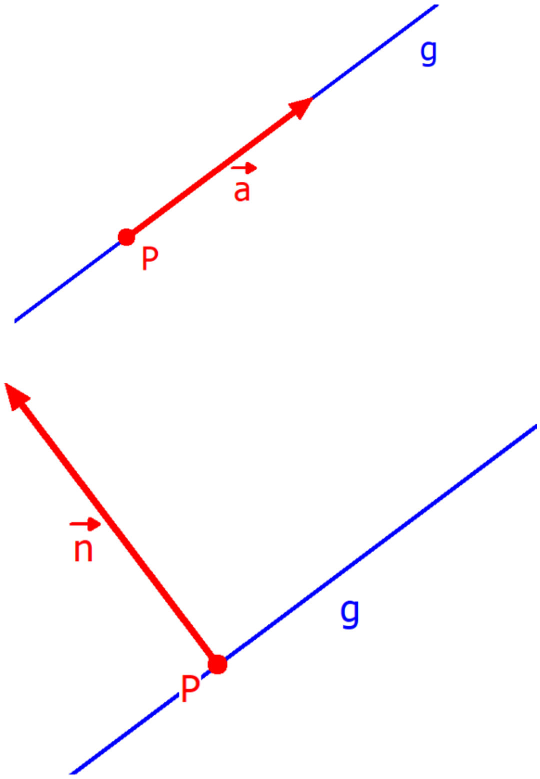
AG3.4 – Geraden

Maturaskript AHS (16 Seiten)

Grundkompetenz:

- **AG3.4** Geraden in $\mathbb{R}^2$ durch Parameterdarstellungen und Gleichungen, in $\mathbb{R}^3$ durch Parameterdarstellungen angeben und diese Darstellungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. πegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

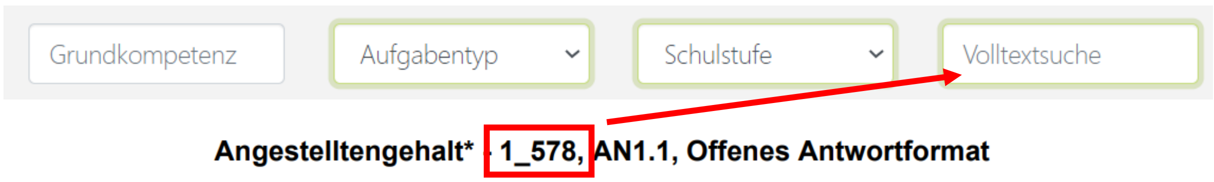
Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M

2) Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialien **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

AG3.4 Geraden

[Video](#)

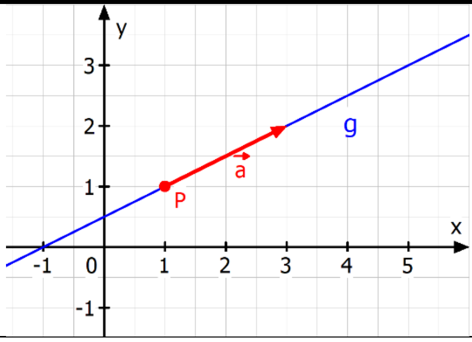
Parameterdarstellung der Geradengleichung

Bei der Parameterdarstellung wird die Gerade durch einen **Punkt** und einen **Vektor** festgelegt. Den Vektor nennt man auch **Richtungsvektor** der Gerade (Länge und Orientierung sind in diesem Zusammenhang nicht wichtig.). Auf jeder Geraden liegen unendlich viele Punkte $X = \binom{x}{y}$.

Sei g eine Gerade, P ein Punkt auf dieser Geraden und $\vec{a}$ ein Richtungsvektor von g.

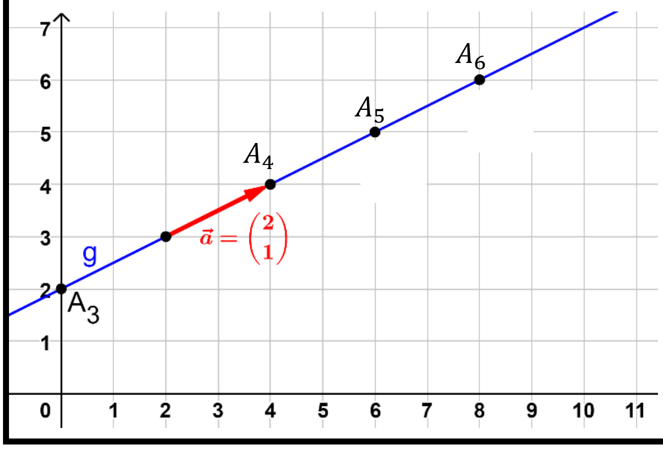
Dann gilt für alle Punkte $X \in g$:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{t} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \quad mit\ t \in \mathbb{R}.$$



Parameterdarstellung: **Punkt** UND **Richtungsvektor**

Für jede reelle Zahl des Parameters t erhält man einen Punkt auf der Geraden g. Umgekehrt entspricht jeder Punkt auf der Geraden g einem eindeutig bestimmten Wert des Parameters t. (=**PARAMETER**darstellung)



$$A_3 = P - 1 \cdot \vec{a} \quad (t = -1)$$

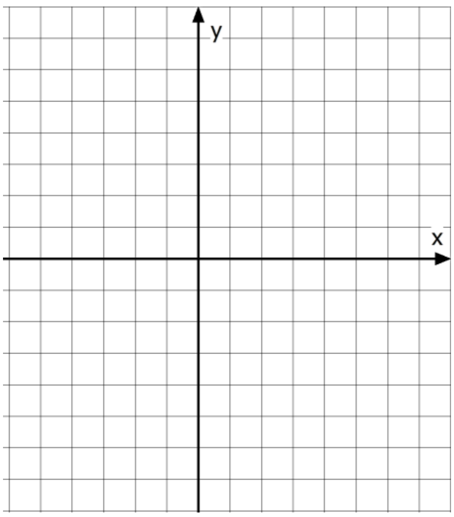
$$A_4 = P + 1 \cdot \vec{a} \quad (t = 1)$$

$$A_5 = P + 2 \cdot \vec{a} \quad (t = 2)$$

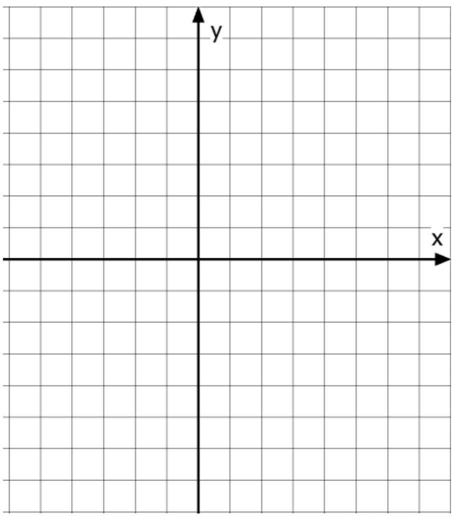
$$A_6 = P + 3 \cdot \vec{a} \quad (t = 3)$$

Bsp. 1) Gegeben ist ein Punkt P und ein Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden g. Gib eine Parameterdarstellung der Geraden an und zeichne die Gerade in das Koordinatensystem. Skaliere die Achsen passend.

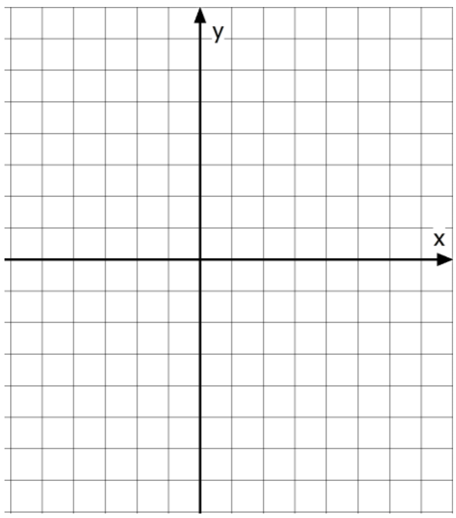
a. $P = (3|4), \vec{a} = \binom{-2}{-2}$



b. $P = (2|100), \vec{a} = \binom{1}{-50}$



c. $P = (100|-100), \vec{a} = \binom{-50}{50}$



<u>Bemerkung</u>: Die Parameterdarstellung einer Geraden ist **NICHT** eindeutig, da der Richtungsvektor $\vec{a}$ grundsätzlich **beliebig gewählt** werden darf, sofern der **gewählte Vektor** zum **Richtungsvektor parallel** ist. Es sind **alle möglichen Vielfache** des Richtungsvektors erlaubt. Die Gerade $g: X = \binom{-2}{-2} + t \cdot \binom{1}{-2}$ kann somit auch mit folgenden Parameterdarstellungen bestimmt werden:

$$g_1: X = \binom{-2}{-2} + t \cdot \binom{2}{-4} \qquad da \binom{2}{-4} parallel\ zu \binom{1}{-2}\ ist$$

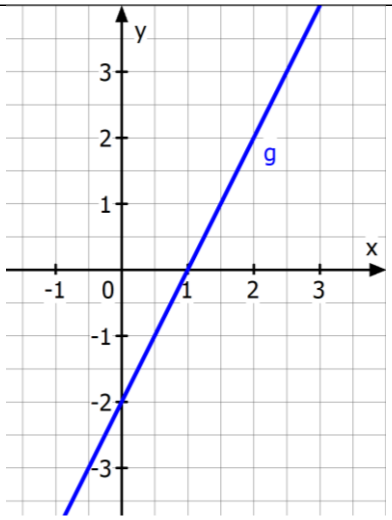
$$g_2: X = \binom{-2}{-2} + t \cdot \binom{-0{,}1}{0{,}2} \qquad da \binom{-0{,}1}{0{,}2} parallel\ zu \binom{1}{-2}\ ist$$

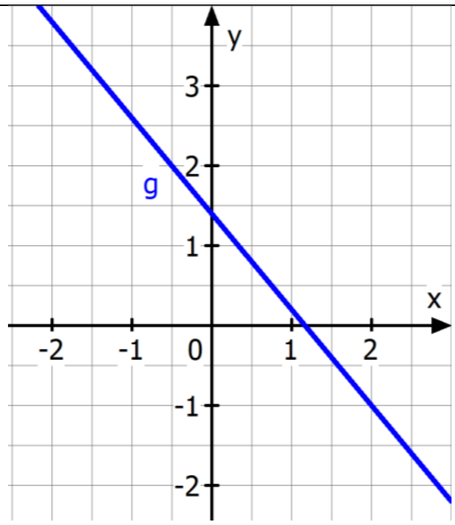
$$g_3: X = \binom{-2}{-2} + t \cdot \binom{100}{-200} \qquad da \binom{100}{-200} parallel\ zu \binom{1}{-2}\ ist$$

Bsp. 2) Gegeben ist eine Parameterdarstellung einer Geraden. Berechne für die gegebenen Werte von t die Punkte auf dieser Geraden.

a. $g: X = \binom{-2}{-2} + t \cdot \binom{-2}{-1}$ $t = -3; 0; 2; 10$	**b.** $g: X = \binom{0}{1} + t \cdot \binom{-5}{-5}$ $t = -10; 1; 5; 20$	**c.** $g: X = \binom{2{,}1}{0{,}7} + t \cdot \binom{0{,}1}{-0{,}2}$ $t = -1; 1; 3; 4$

Bsp. 3) Gib **zwei verschiedene Parameterdarstellungen** der dargestellten Geraden g an.





Bsp. 4) Gegeben ist ein Punkt P und ein Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden g. Gib eine Parameterdarstellung der Geraden an. Gib zwei Punkte auf der Geraden an.

a. $P=(3\|4\|1), \vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$	**b.** $P=(-1\|7\|4), \vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\12\\2\end{pmatrix}$	**c.** $P=(13\|-4\|11), \vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Bsp. 5) Bestimme die fehlende Koordinate des Punktes P so, dass er auf der Geraden g liegt.

a. $g: X=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}\ -\ P=(\boldsymbol{x}\|7)$	**b.** $g: X=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\ -\ P=(1\|y)$

Bsp. 6) Überprüfe, ob die Punkte auf der Geraden g liegen.

a. $g: X=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\ -\ P_1=(-4\|7),\ P_2=(8\|-6)$	**b.** $g: X=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\ -\ P_1=(-5\|-1), P_2=(3\|5)$

Bsp. 7) Gib jeweils eine zu g (1) parallele (2) normale Gerade an, die durch den Punkt P geht.

a. $g: X = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ – $P = (7\|5)$	**b.** $g: X = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ – $P = (-7\|1)$

Bsp. 8) Gib zwei verschiedene Parameterdarstellungen an, die auf die Gerade g normal stehen.

a. $g: X = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$	**b.** $g: X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Bsp. 9) Bestimme die fehlenden Koordinaten des Punktes P so, dass er auf der Geraden g liegt.

a. $g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ – $P = (\boldsymbol{x}\|11\|\boldsymbol{z})$	**b.** $g: X = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ -0{,}6 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ – $P = (\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{y}\|1)$

Bsp. 10) Überprüfe, ob der Punkt auf der Geraden g liegt.

a. $g: X = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ – $P = (11\|12\|-1{,}5)$	**b.** $g: X = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$ – $P = (-1\|17\|-13)$

Geraden in R2* - 1_786, AG3.4, 2 aus 5

Für die zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^2$ gilt:

- Die Gerade g mit dem Richtungsvektor $\vec{g}$ hat den Normalvektor $\vec{n_g}$.
- Die Gerade h mit dem Richtungsvektor $\vec{h}$ hat den Normalvektor $\vec{n_h}$.
- Die Geraden g und h stehen normal aufeinander.

Kreuzen Sie die beiden Bedingungen an, die auf jeden Fall gelten.

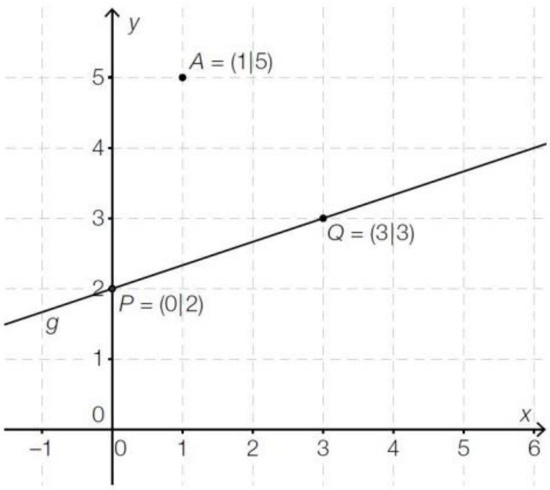
$\vec{n_g} \cdot \vec{h} = 0$	☐
$\vec{n_g} \cdot \vec{n_h} = 0$	☐
$\vec{g} = r \cdot \vec{h}$ mit $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☐
$\vec{g} = r \cdot \vec{n_h}$ mit $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☐
$\vec{g} \cdot \vec{n_h} = 0$	☐

Gleichung einer Geraden aufstellen* - 1_713, AG3.4, Offenes Antwortformat

Die Punkte $A = (7|6)$, $M = (-1|7)$ und $N = (8|1)$ sind gegeben.
Eine Gerade g verläuft durch den Punkt A und steht normal auf die Verbindungsgerade durch die Punkte M und N.
Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an.

Gleichung einer Geraden* - 1_465, AG3.4, Offenes Antwortformat

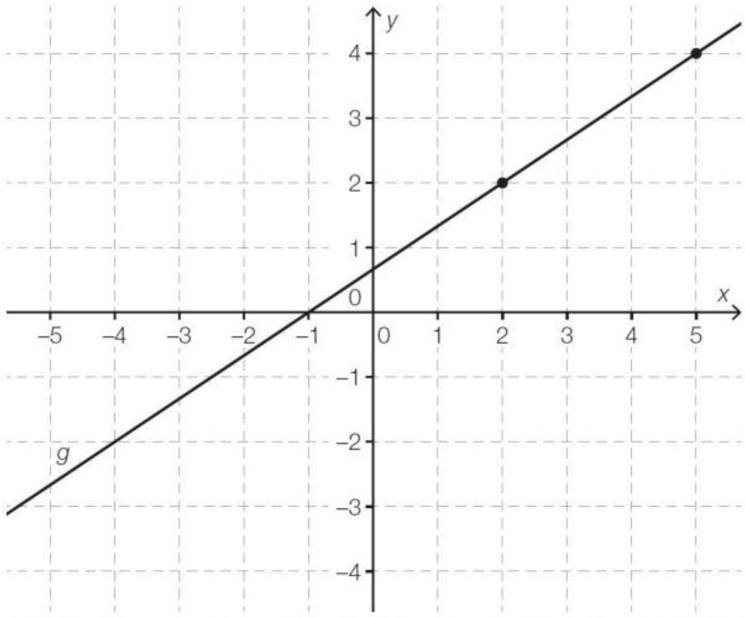
In der nachstehenden Abbildung sind eine Gerade g durch die Punkte P und Q sowie der Punkt A dargestellt.



Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h, die durch A verläuft und normal zu g ist!

Parallele Gerade durch einen Punkt* - 1_738, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Im nachstehenden Koordinatensystem ist eine Gerade g abgebildet. Die gekennzeichneten Punkte der Geraden g haben ganzzahlige Koordinaten.



Geben Sie eine Parameterdarstellung einer zu g parallelen Geraden h durch den Punkt $(3|-1)$ an.

$h: X =$ ____

Parallele Geraden* - 1_665, AG3.4, 2 aus 5

Gegeben sind die Parameterdarstellungen zweier Geraden $g: X = P + t \cdot \vec{u}$ und $h: X = Q + s \cdot \vec{v}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ und $\vec{u}, \vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Welche der nachstehend angeführten Aussagen sind unter der Voraussetzung, dass die beiden Geraden zueinander parallel, aber nicht identisch sind, stets zutreffend?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$P = Q$	☐
$P \in h$	☐
$Q \notin g$	☐
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	☐
$\vec{u} = a \cdot \vec{v}$ für ein $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☐

Parallelität von Geraden* - 1_561, AG3.4, Offenes Antwortformat

Gegeben sind folgende Parameterdarstellungen der Geraden g und h:

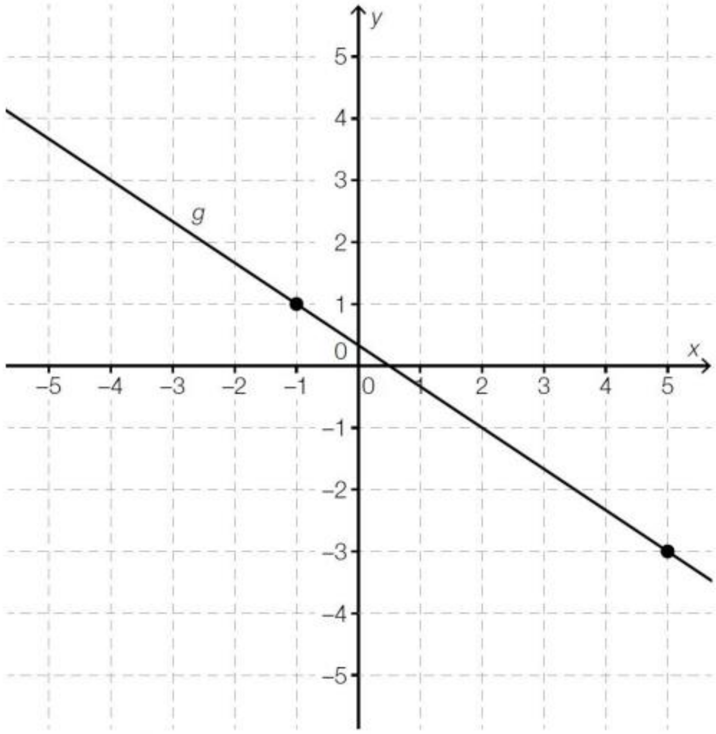
$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

$$h: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie die Koordinaten h_y und h_z des Richtungsvektors der Geraden h so, dass die Gerade h zur Geraden g parallel ist!

Parameterdarstellung einer Geraden* - 1_690, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

In der nachstehenden Abbildung ist eine Gerade g dargestellt. Die gekennzeichneten Punkte der Geraden g haben ganzzahlige Koordinaten.



Vervollständigen Sie folgende Parameterdarstellung der Geraden g durch Angabe der Werte für a und b mit $a, b \in \mathbb{R}$!

$$g: X = \begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ b \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

a = ____________________

b = ____________________

Parameterdarstellung einer Geraden* - 1_418, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Die zwei Punkte $A = (-1|-6|2)$ und $B = (5|-3|-3)$ liegen auf einer Geraden g in $\mathbb{R}^3$.
Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden g unter Verwendung der konkreten Koordinaten der Punkte A und B an!

$g: X =$ ______________________________

Parameterdarstellung von Geraden* - 1_369, AG3.4, 2 aus 5

Gegeben ist eine Gerade g:

$$g: X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Geraden h_i ($i = 1, 2, \ldots, 5$) mit $t_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \ldots, 5$) sind parallel zu g?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Antworten an!

$h_1: X = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐
$h_2: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐
$h_3: X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	☐
$h_4: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	☐
$h_5: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t_5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	☐

Parameterdarstellung* - 1_810, AG3.4, Offenes Antwortformat

Gegeben ist eine Gerade g mit der Parameterdarstellung g: $X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

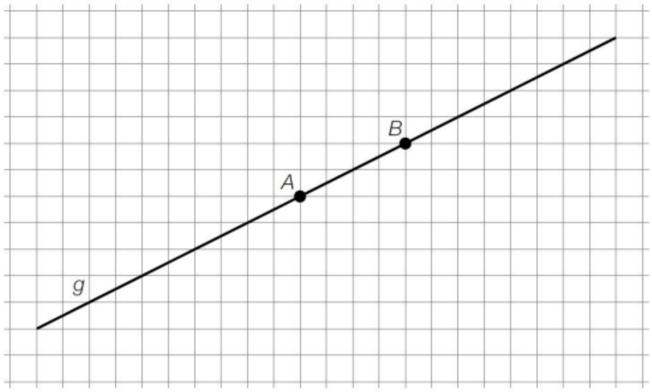
Bestimmen Sie t so, dass $X = B$ gilt.

Punkt auf einer Geraden* - 1_882, AG3.4, Konstruktionsformat

Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B und kann durch $g: X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Für den Punkt $C \in g$ gilt: $t = -1,5$.

Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Punkt C ein.



Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse* - 1_442, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist folgende Parameterdarstellung einer Geraden g:

$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der x-Achse an!

$S =$ ______________________________

Zur x-Achse parallele Gerade* - 1_642, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist eine Gerade g mit der Parameterdarstellung $g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{a}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Geben Sie einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ so an, dass die Gerade g parallel zur x-Achse verläuft!

$\vec{a} =$ ____

Normalvektordarstellung der Geradengleichung

Video

Sei $\vec{n}$ ein Normalvektor und P ein beliebiger Punkt der Geraden g, dann gilt für alle Punkte $X \in g$:

$$g: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$$

Bemerkung: Die Normalvektordarstellung kann in Koordinatenform angeschrieben werden:

$$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$n_1 x + n_2 y = n_1 p_1 + n_2 p_2$$

Allgemeine Geradengleichung
$$\boldsymbol{ax + by = c}$$

Normalvektorform: **Punkt** UND **Normalvektor**

Beweis:

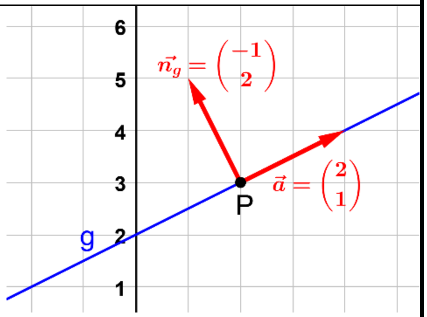
Multipliziere die Parameterdarstellung mit dem zugehörigen Normalvektor ein:

$$X = P + t \cdot \vec{a} \quad | \cdot \vec{n}$$

$$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P + t \cdot \boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{n}}$$

Bemerkung: Das skalare Produkt von $\vec{a} \cdot \vec{n}$ ist 0, da diese beiden Vektoren normal aufeinander stehen!!!

$$\rightarrow \quad \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$$



Die **allgemeine Form** der Geradengleichung $\boldsymbol{ax + by = c}$ erhält man durch **Anwenden** des **Skalarprodukts** der **Normalvektorform**.

Beispiel: Die Gerade $g: X = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist in der **Parameterform** gegeben. Gib g in der Normalvektorform & in der allgemeinen Form an.

1. Schritt: Bestimmung des Normalvektors zu $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ -> z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Schritt: Aufstellen der Normalvektorform: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und wir wissen, dass die Gerade durch den Punkt $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ geht.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. Schritt: Anwendung des Skalarprodukts – Darstellung in der allgemeinen Form:

$$2x + y = -1$$

Vorteil: Ist die Gerade in der **Normalvektorform** bzw. **allgemeinen** Form gegeben, so kann der **Normalvektor** der Geraden **direkt abgelesen** werden!!! 😊

$$g: -3x + 7y = 6 \quad \rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Bsp. 11) Eine Gerade g ist in der Parameterdarstellung gegeben. Bestimme eine Gleichung von g in der **Normalvektorform** und in der **allgemeinen Form**.

a. $g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$	**b.** $g: X = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Bsp. 12) Eine Gerade g ist durch zwei Punkte gegeben. Bestimme eine Gleichung von g in der **Normalvektorform** und in der **allgemeinen Form**.

a. $A = (-2\|1), B = (3\|7)$	**b.** $A = (4\|2), B = (-2\|-5)$

Bsp. 13) Eine Gerade h geht durch den Punkt H und steht normal auf die Gerade g. Bestimme für die Gerade h die allge**meine Geradengleichung**.

a. $g: X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}, H = (2\|-1)$	**b.** $g: X = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, H = (-1\|7)$

Bsp. 14) Bestimme (1) einen Normalvektor, (2) einen Richtungsvektor der gegebenen Geraden g.

a. $g: X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$	**b.** $g: 3x - 5y = 1$

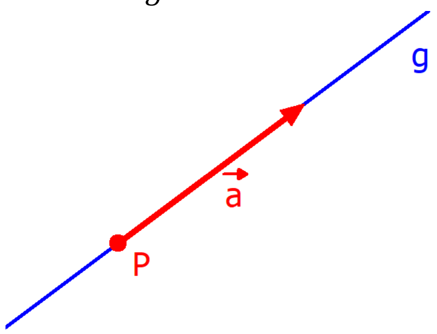
Bsp. 15) Die Gerade g ist in der allgemeinen Form gegeben. Bestimme drei beliebige Punkte auf der Gerade g.

a. $g: 2x + 4y = 10$	**b.** $g: -3x - y = -4$

Zusammenfassung: Geradengleichungen im R²

Parameterdarstellung

$$g: X = P + t \cdot \vec{a}$$

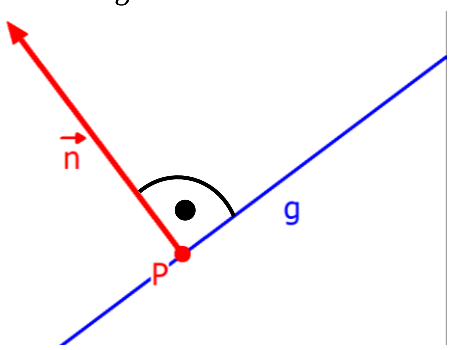


$$\vec{n} \perp \vec{a}$$

Der **Punkt P** kann übernommen werden.

Normalvektorform

$$g: \ \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$$



Richtungsvektor von g:

$$\vec{a} = \binom{1}{k}$$

$$g \parallel \binom{1}{k}$$

Punkt auf g:

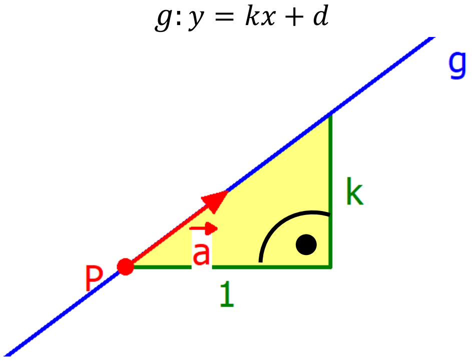
$$P = (0|d)$$

Ausrechnen
Skalarprodukt

$$\vec{n} = \binom{a}{b}$$

Lineare Funktion (Hauptform)

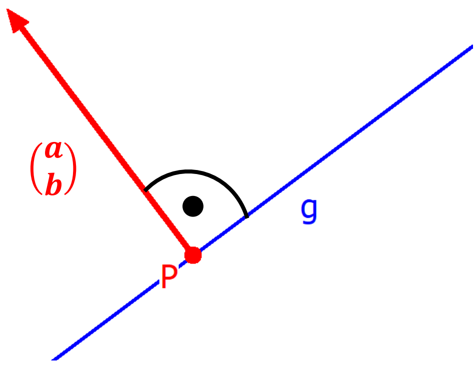
$$g: y = kx + d$$



UMFORMEN

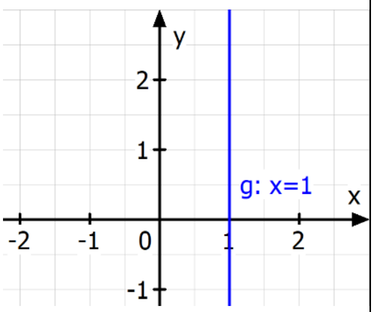
Allgemeine Geradengleichung

$$g: ax + by = c$$



Bemerkung: Eine **Geradengleichung** der Form $g: x = c$ beschreibt eine **senkrechte Gerade**. Diese kann **nicht** als **lineare Funktion** geschrieben werden!!!

- **Allgemeine Form**: $g: x = 1$
- **Parameterform**: $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **Normalvektorform**: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to x = 1$



Bsp. 16) Gib die Gerade in der **Parameterdarstellung** an.

a. $g:\ 5x + y = 15$	**b.** $g:\ -2x + 6y = 14$

Bsp. 17) Gib die Gerade in der **Normalvektorform** und **allgemeinen Form** an.

a. $g: X = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	**b.** $g: X = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bsp. 18) Eine Gerade ist in der Form $g: y = kx + d$. Gib die Gerade in der **Parameterform** an.

a. $g:\ y = -2x + 7$	**b.** $g:\ y = 7x + 12$

Bsp. 19) Eine Gerade ist durch die Punkte A und B gegeben. Gib diese Gerade **(1)** in **Parameterdarstellung**, **(2)** in **Normalvektordarstellung, (3)** in **allgemeiner Form** und **(4)** als **lineare Funktion** an.

a. $g\colon\ A = (-7\vert 9), B = (-5\vert 5)$	**b.** $g\colon\ A = (3\vert 1), B = (10\vert -6)$

Geradengleichung* - 1_514, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Die Gerade g ist durch eine Parameterdarstellung $g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ gegeben.

Geben Sie mögliche Werte der Parameter a und b so an, dass die durch die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = 1$ gegebene Gerade h normal zur Geraden g ist!

$a =$ ______________________________

$b =$ ______________________________

Geradengleichung* - 1_392, AG3.4, Offenes Antwortformat

Gegeben ist eine Gerade g mit der Gleichung $2 \cdot x - 5 \cdot y = -6$.
Geben Sie die Gleichung der Geraden h an, die durch den Punkt $(0|0)$ geht und zur Geraden g parallel ist!

Parallele Gerade* - 1_537, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist die Gerade g: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Die Gerade h verläuft parallel zu g durch den Koordinatenursprung.

Geben Sie die Gleichung der Geraden h in der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ an!

h: ___________________________________

Parallele Geraden* - 1_345, AG3.4, Offenes Antwortformat

Gegeben sind Gleichungen der Geraden g und h. Die beiden Geraden sind nicht identisch.

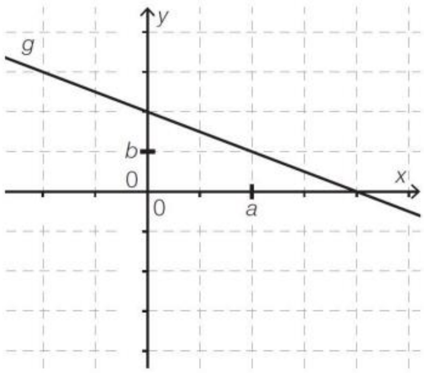
g: $y = -\frac{x}{4} + 8$

h: $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$

Begründen Sie, warum diese beiden Geraden parallel zueinander liegen!

Skalierung der Koordinatenachsen* - 1_762, AG3.4, Halboffenes Antwortformat

Im nachstehenden Koordinatensystem, dessen Achsen unterschiedlich skaliert sind, ist eine Gerade g dargestellt. Auf der x-Achse ist a und auf der y-Achse ist b markiert. Dabei sind a und b ganzzahlig.
Die Gerade g wird durch $y = -2 \cdot x + 4$ beschrieben.



Geben Sie a und b an.

a = ___________________________________

b = ___________________________________

Darstellungsformen von Geraden im $\mathbb{R}^3$:
Im $\mathbb{R}^3$kann eine Gerade in **Parameterform** dargestellt werden. Eine Darstellung in der **Normalvektorform**, in der **allgemeinen Form** und in der **Hauptform** ist **nicht möglich**.
Im $\mathbb{R}^3$ kann eine Gerade nicht in die Normalvektorform umgewandelt werden, da es zu einem Richtungsvektor **unendlich viele verschieden gerichtete** Normalvektoren gibt.

Bsp. 21) Gib eine Parameterform zweier Geraden p und n mit folgenden Eigenschaften an:

Video

- P liegt auf p und n.
- p ist parallel zu g.
- n steht normal auf g.

a. $g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ – $P = (1\|2\|3)$	**b.** $g: X = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ – $P = (4\|7\|1)$

Bsp. 22) Die Landungsphase eines Flugzeuges kann durch folgende Parameterdarstellung beschrieben werden:

$$Flugzeug\ f: X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7000 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ -200 \end{pmatrix}$$

Die Längeneinheit beträgt 1m. Der Parameter t gibt die Zeit in Sekunden an.

a. An welchen Positionen befindet sich das Flugzeug zur Zeit $t_1 = 0s, t_2 = 10s\ und\ t_3 = 30s$?
b. Wie groß ist die Geschwindigkeit?
c. Wann und in welchem Punkt landet das Flugzeug (z=0)?

Bsp. 23) Ein Hubschrauber befindet sich auf einer geradlinigen Flugbahn. Die Flugbahn wird durch eine gegebene Parameterdarstellung beschrieben. Die Koordinatenangaben sind als Längenangaben in Metern zu lesen. Die Zeit t wird in Sekunden angegeben.

$$Hubschrauber\ h: X(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 70 \\ 100 \end{pmatrix}$$

a. An welchen Positionen befindet sich das Flugzeug zur Zeit $t_1 = 0s, t_2 = 15s\ und\ t_3 = 50s$?
b. Berechne die Geschwindigkeit in m/s und km/h!
c. Wann wird eine Steighöhe von $z = 7000m$ erreicht?

Video

Lagebeziehung von Geraden

Zwei Geraden können in $\mathbb{R}^2$ genau einen, keinen oder unendlich viele Punkt(e) gemeinsam haben. Daher ergeben sich folgende Lagebeziehungen:

1. Fall **SCHNEIDEND**	**2. Fall** **(ECHT) PARALLEL**	**3. Fall** **IDENTISCH**
Die Geraden sind **schneidend** und haben **genau einen gemeinsamen Schnittpunkt**.	Die Geraden sind **(echt) parallel** und haben **keinen gemeinsamen Punkt**.	Die Geraden sind **identisch** und haben **unendlich viele Punkte gemeinsam**.