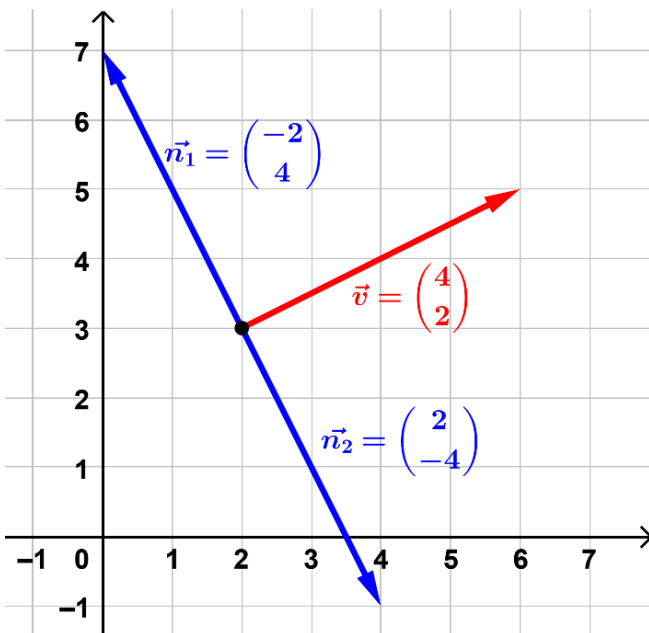


AG3 – Vektorrechnung

Maturaskript AHS (23 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **AG 3.1** Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können
- **AG 3.2** Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können
- **AG3.3** Definitionen der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarprodukt) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können
- **AG3.5** Normalvektoren in \mathbb{R}^2 aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können

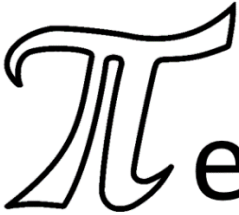


Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof.  egischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** (Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool) gelöst werden, um das Erlernete zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info: *bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, ...) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): <https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/>
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

- 1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: <https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M>
- 2) Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Grundkompetenz Aufgabentyp Schulstufe Volltextsuche

Angestellte Gehalt* **1_578**, AN1.1, Offenes Antwortformat

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	Weitere Regeln für Lehrpersonen
<ul style="list-style-type: none">▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen.▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen.▪ Sie dürfen mein Material NICHT gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden.▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden.▪ Bei einem Missbrauch erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	<p>WICHTIGSTE REGEL: LehrerInnen dürfen die Materialien in Ihrem eigenen Unterricht verwenden:</p> <ul style="list-style-type: none">▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen.▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben.▪ Es ist nicht erlaubt, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben.▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** ([prof. tegischer](#)) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

AG3 Vektorrechnung

Video 1

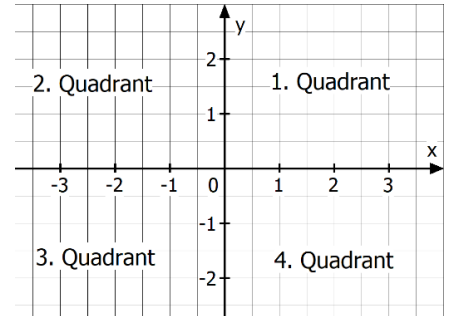


1. GRUNDLAGEN

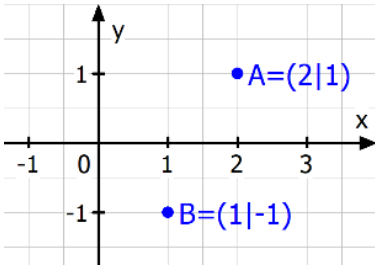
Für die Vektorrechnung sind Koordinatensysteme essentiell. Im zweidimensionalen Raum besitzt ein Koordinatensystem 2 Achsen:

- die x-Achse (waagrecht) und
- die y-Achse (senkrecht)

Diese sind unendlich lang und spannen die vier sogenannten Quadranten auf. Die rechte Graphik zeigt die Positionen der Quadranten. Beim Schnittpunkt der beiden Achsen liegt der Ursprung mit den Koordinaten (0|0).



Im dreidimensionalen Raum kommt eine dritte Achse - die z-Achse - dazu. Punkte und Vektoren besitzen dementsprechend dann auch 3 Koordinaten. Dies kann man – theoretisch bis ins n-dimensionale weiterführen.



Punkte:

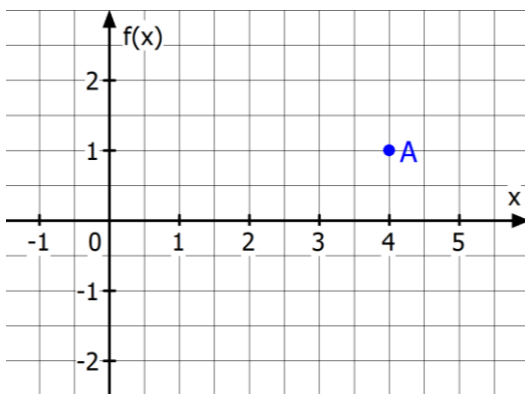
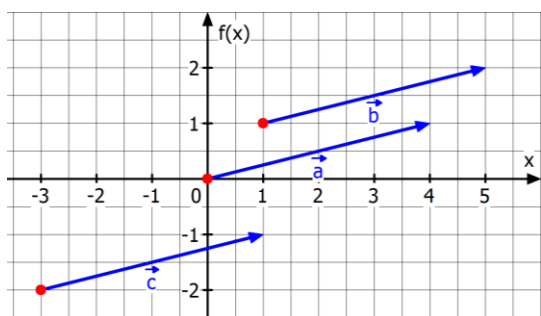
In ein Koordinatensystem lassen sich Punkte eintragen. Diese besitzen, entsprechend ihrer Lage, Koordinaten. Im Bild z.B. haben wir die Punkte A und B, wobei sich A im ersten Quadranten befindet und B im vierten Quadranten. Man schreibt: $A = (2|3)$ bzw. $B = (1|-2)$.

Einen allgemeinen Punkt schreibt man an als $P = (x_1|x_2| \dots |x_n)$ (im n-dimensionalen Raum \mathbb{R}^n) bzw. $P = (x|y)$ (im 2-dimensionalen Raum \mathbb{R}^2) oder $P = (x|y|z)$ (im 3-dimensionalen Raum \mathbb{R}^3). Die erste Koordinate entspricht der x-Koordinate, die zweite der y-Koordinate, die eventuelle dritte der z-Koordinate.

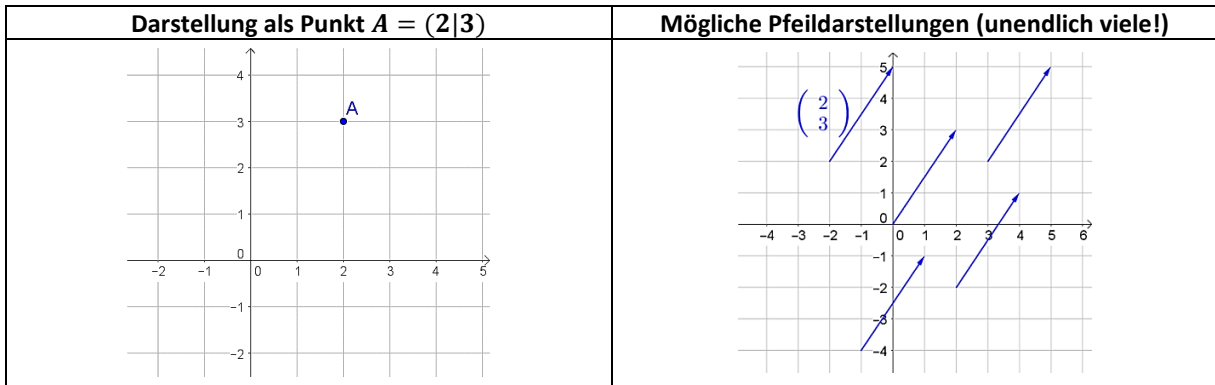
Punkte werden immer mit Großbuchstaben angegeben!!

1.1 GEOMETRISCHE DARSTELLUNG VON VEKTOREN

Vektoren wurden in der Unterstufe bereits als **Punkte** in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Jedoch kann ein **Vektor** auch als **Pfeil** interpretiert werden. Einem Vektor kann man somit genau einen Punkt oder unendlich viele, gleich lange, parallele Pfeile mit gleicher Orientierung zuordnen.

<p style="text-align: center;">Vektor als Punkt $A = (4 1)$</p> <p>Der Vektor gibt dabei die x- und y-Koordinaten des Punktes an.</p> 	<p style="text-align: center;">Vektor als Pfeil $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Die x-Koordinate gibt an, um wie viele Einheiten man sich parallel zur x-Achse bewegt. <ul style="list-style-type: none"> ❖ Positive x-Koordinate: nach rechts ❖ Negative x-Koordinate: nach links ▪ Die y-Koordinate gibt an, um wie viele Einheiten man sich parallel zur y-Achse bewegt. <ul style="list-style-type: none"> ❖ Positive y-Koordinate: nach oben ❖ Negative y-Koordinate: nach unten 
!! Großbuchstabe !!	!! Kleinbuchstabe mit einem Pfeil !!
Die Darstellung als Punkt ist eindeutig! Einem Zahlenpaar (=Vektor) entspricht genau ein Punkt!	Die Darstellung als Pfeil ist nicht eindeutig! Es gibt unendlich viele Pfeile , die denselben Vektor darstellen. Diese Pfeile sind aber alle parallel, gleich lang und gleich gerichtet.

Beispiel: Darstellung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$



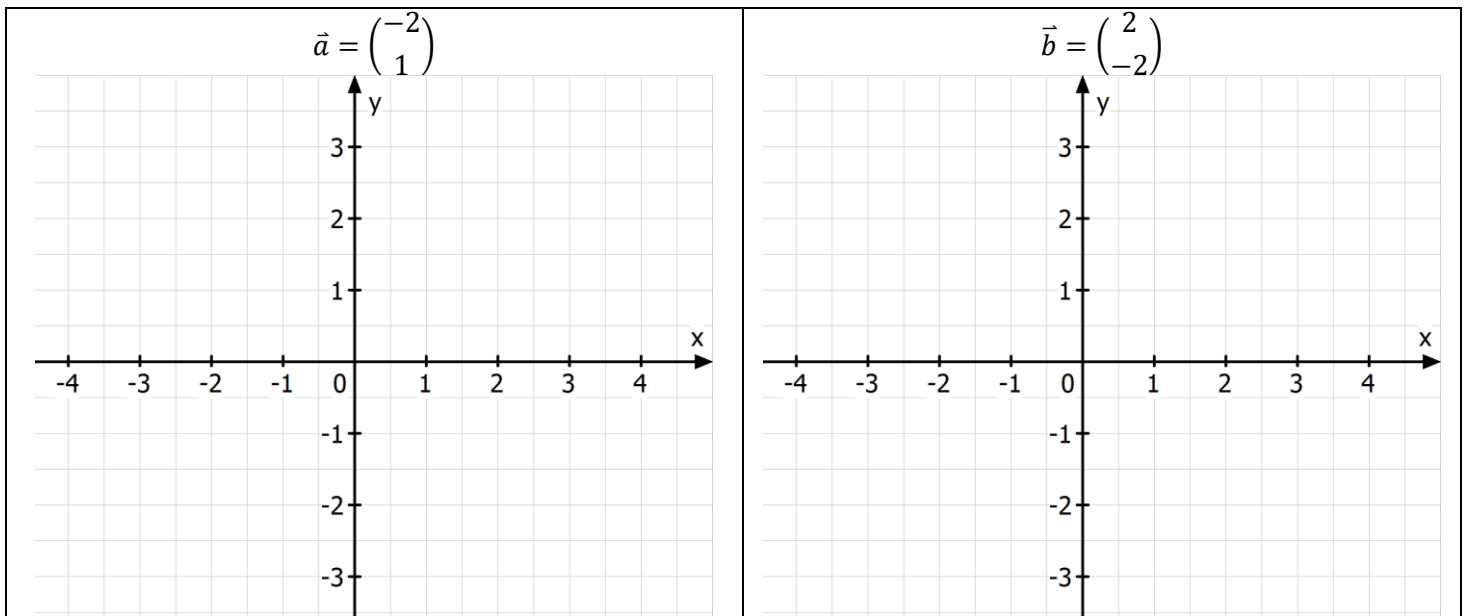
Definition (Vektor)

- Ein **Zahlenpaar** $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ wird als **Vektor** aus \mathbb{R}^2 bezeichnet.
- Analog bezeichnet man ein **Zahlentripel** $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ als **Vektor** aus \mathbb{R}^3 .
- Ein **allgemeiner Vektor** wird $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ geschrieben.

Vektoren können in **Spaltenform** oder in **Zeilenform** angeschrieben werden.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (3|2) \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1|2|3)$$

Bsp. 1) Zeichne jeweils vier verschiedene Pfeildarstellungen des gegebenen Vektors.

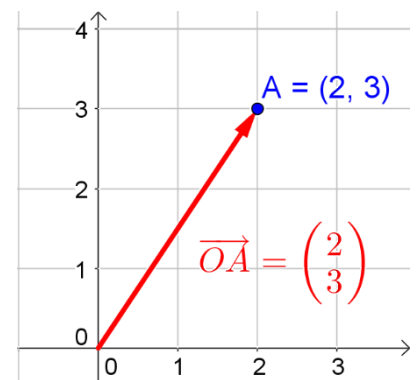


1.2 ORTSVEKTOR:

Der **Ortsvektor** von einem Punkt ist der Vektor, der vom **Ursprung** aus auf den

Punkt zeigt. Sei $A(x_1|x_2|\dots|x_n)$ ein Punkt der Dimension n , dann ist $\vec{OA} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

dessen Ortsvektor.

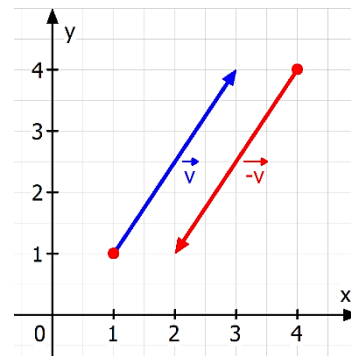


1.3 GEGENVEKTOR UND NULLVEKTOR

Wenn ein Vektor \vec{v} gegeben ist, so bezeichnet man den entgegengesetzten Vektor als **Gegenvektor** $-\vec{v}$.

Beispiel: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow -\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Addiert man einen Vektor mit seinem Gegenvektor, dann erhält man den Nullvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vektor und Gegenvektor heben einander auf!!!



Bsp. 2) Gib den Gegenvektor an.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow -\vec{a} =$	$\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow -\vec{b} =$	$\vec{c} = \begin{pmatrix} -14 \\ -14 \end{pmatrix} \rightarrow$
$\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow$	$\vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow$	$\vec{f} = \begin{pmatrix} 102 \\ -103 \end{pmatrix} \rightarrow$

2. RECHNEN MIT VEKTOREN

2.1 ADDITION UND SUBTRAKTION VON VEKTOREN

[Video 2](#)



Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ Vektoren aus dem \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Wenn du Vektoren addieren oder subtrahieren möchtest, musst du dazu die entsprechenden Koordinaten addieren:

$$\vec{x} \pm \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \dots \\ x_n \pm y_n \end{pmatrix}$$

Wichtig ist dabei, dass die Vektoren, die du **addieren** oder **subtrahieren** möchtest, **derselben Dimension n** angehören! D.h. sie haben gleich viele Koordinaten.

Dimension n = 2: Addition/Subtraktion im \mathbb{R}^2 :

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren aus dem \mathbb{R}^2 , dann gilt:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

Bsp. 3) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ -12 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Berechne.

$\vec{a} + \vec{b} =$	$\vec{a} - \vec{c} =$	$\vec{b} + \vec{e} =$
$\vec{d} - \vec{a} =$	$\vec{b} - \vec{d} =$	$\vec{c} - \vec{d} =$
$\vec{e} - \vec{a} =$	$\vec{c} + \vec{a} =$	$\vec{b} - \vec{a} =$

Bsp. 4) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -11 \\ 22 \\ -13 \end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$. Berechne.

$\vec{a} + \vec{b} =$	$\vec{a} - \vec{c} =$	$\vec{b} + \vec{e} =$
$\vec{d} - \vec{a} =$	$\vec{b} - \vec{d} =$	$\vec{c} - \vec{d} =$
$\vec{e} - \vec{a} =$	$\vec{c} + \vec{a} =$	$\vec{b} - \vec{a} =$

2.2 PRODUKT EINES VEKTORS MIT EINEM SKALAR

Es seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein **Vektor** aus dem \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) und k eine **reelle Zahl**. Wenn man einen Vektor \vec{x} mit einer reellen Zahl k , einem sogenannten "**Skalar**", multipliziert, werden dabei die einzelnen Koordinaten mit dem Skalar multipliziert:

$$k \cdot \vec{v} = k \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x_1 \\ k \cdot x_2 \\ \dots \\ k \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Bsp. 5) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$. Berechne.

$2 \cdot \vec{a} =$	$-3 \cdot \vec{a} =$	$10 \cdot \vec{a} =$
$4 \cdot \vec{b} =$	$-0,5 \cdot \vec{b} =$	$100 \cdot \vec{b} =$
$0,1 \cdot \vec{c} =$	$1,5 \cdot \vec{c} =$	$5 \cdot \vec{c} =$

2.3 PRODUKT ZWEIER VEKTOREN (=SKALARPRODUKT)

Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ Vektoren aus dem \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Das Produkt zweier Vektoren nennt man **Skalarprodukt**:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Das **Ergebnis** der **Multiplikation** zweier Vektoren ist **KEIN Vektor**, sondern eine **reelle Zahl** (=Skalar).

Dimension $n = 2$: Skalarprodukt

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren aus dem \mathbb{R}^2 , dann gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Bsp. 6) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ -12 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Berechne.

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$	$\vec{a} \cdot \vec{c} =$	$\vec{b} \cdot \vec{e} =$
$\vec{d} \cdot \vec{a} =$	$\vec{b} \cdot \vec{d} =$	$\vec{c} \cdot \vec{d} =$

Bsp. 7) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bilde das Skalarprodukt.

Anwendung des Skalarprodukts: Menge mal Preis

Beispiel: Acht Jugendliche kaufen sich je ein Getränk um 2,50€. Alle bis auf zwei kaufen auch je eine Portion Pommes um 4,20€. Berechne den Gesamtpreis auf zwei Arten:

Darstellung mit einer Tabelle

	Anzahl	Stückpreis	Gesamt
Getränke	8	2,50	20,00
Pommes	6	4,20	25,20
		Summe	45,20

Darstellung mit Vektoren

Fasse die gekauften Stückzahlen in einem Anzahlvektor \vec{a} und die Preise in einem Stückpreisvektor \vec{p} zusammen.

- Die 1. Komponente bezieht sich auf die Getränke
- Die 2. Komponente bezieht sich auf die Pommes

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{p} = \begin{pmatrix} 2,50 \\ 4,20 \end{pmatrix}$$

Berechnung mit dem **Skalarprodukt**:

$$\vec{a} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,50 \\ 4,20 \end{pmatrix} = 8 \cdot 2,50 + 6 \cdot 4,20 = 45,20\text{€}$$

Der Gesamtpreis für Hamburger und Getränke beträgt 45,20 €.

Betriebsgewinn - 1_206, AG3.1, Halboffenes Antwortformat

Ein Betrieb produziert und verkauft die Produkte P_1, \dots, P_5 . In der vorangegangenen Woche wurden x_i Stück des Produkts P_i produziert und auch verkauft. Das Produkt P_i wird zu einem Stückpreis v_i verkauft, k_i sind die Herstellungskosten pro Stück P_i .

Die Vektoren X, V und K sind folgendermaßen festgelegt:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix}$$

Geben Sie mithilfe der gegebenen Vektoren einen Term an, der für diesen Betrieb den Gewinn G der letzten Woche beschreibt!

$G =$ _____

Energiesparlampen - 1_207, AG3.1, Offenes Antwortformat

Ein Händler handelt mit 7 verschiedenen Typen von Energiesparlampen. In der Buchhaltung verwendet er folgende 7-dimensionale Vektoren (die Werte in den Vektoren beziehen sich auf einen bestimmten Tag):

- Lagerhaltungsvektor L_1 für Lager 1 zu Beginn des Tages
- Lagerhaltungsvektor L_2 für Lager 2 zu Beginn des Tages
- Vektor P der Verkaufspreise
- Vektor B , der die Anzahl der an diesem Tag ausgelieferten Lampen angibt

Interpretieren Sie den Ausdruck $(L_1 + L_2 - B) \cdot P$ in diesem Zusammenhang!

Körpergröße* - 1_856, AG3.1, Offenes Antwortformat

Die Komponenten des Vektors K_1 geben die Körpergrößen der Kinder einer bestimmten Schulklasse (in cm) zu Beginn eines Schuljahres an.

Die Komponenten des Vektors K_2 geben die Körpergröße dieser Kinder (in cm) n Monate später an ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). (Die Körpergrößen sind sowohl in K_1 als auch in K_2 in alphabetischer Reihenfolge der Namen der Kinder geordnet.)

Interpretieren Sie den Vektor $\frac{1}{n} \cdot (K_2 - K_1)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Perlensterne - 1_208, AG3.1, Offenes Antwortformat

Für einen Adventmarkt sollen Perlensterne hergestellt werden. Den Materialbedarf für die verschiedenen Modelle kann man der nachstehenden Tabelle entnehmen.

Den Spalten der Tabelle entsprechen Vektoren im \mathbb{R}^4 :

- Materialbedarfsvektor S_1 für den Stern 1
- Materialbedarfsvektor S_2 für den Stern 2
- Kostenvektor K pro Packung zu 10 Stück
- Lagerbestand L



	Material Stern 1	Material Stern 2	Kosten pro Packung Perlen	Lagerbestand der Perlen-Packungen
Wachspierlen 6 mm	1	0	€ 0,20	8
Wachspierlen 3 mm	72	84	€ 0,04	100
Glasperlen 6 mm	0	6	€ 0,90	12
Glasperlen oval	8	0	€ 1,50	9

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Bedeutung des Ausdrucks $10 \cdot L - (5 \cdot S_1 + 8 \cdot S_2)$ in diesem Zusammenhang an!

Würstelstand* - 1_569, AG3.1, Halboffenes Antwortformat

Ein Würstelstandbesitzer führt Aufzeichnungen über die Anzahl der täglich verkauften Würstel. Die Aufzeichnung eines bestimmten Tages ist nachstehend angegeben:

	Anzahl der verkauften Portionen	Verkaufspreis pro Portion (in Euro)	Einkaufspreis pro Portion (in Euro)
Frankfurter	24	2,70	0,90
Debreziner	14	3,00	1,20
Burenwurst	11	2,80	1,00
Käsekrainer	19	3,20	1,40
Bratwurst	18	3,20	1,20

Die mit Zahlenwerten ausgefüllten Spalten der Tabelle können als Vektoren angeschrieben werden. Dabei gibt der Vektor A die Anzahl der verkauften Portionen, der Vektor B die Verkaufspreise pro Portion (in Euro) und der Vektor C die Einkaufspreise pro Portion (in Euro) an.

Geben Sie einen Ausdruck mithilfe der Vektoren A , B und C an, der den an diesem Tag erzielten Gesamtgewinn des Würstelstandbesitzers bezogen auf den Verkauf der Würstel beschreibt!

Gesamtgewinn = _____

GEOMETRISCHE INTERPRETATION VON VEKTOREN IM \mathbb{R}^2

2.1 BERECHNEN EINES VEKTORS MIT ANFANGSPUNKT UND ENDPUNKT

Zwischen **zwei Punkten** kann ein verbindender **Vektor** bestimmt werden. Dies funktioniert mit Hilfe der „**Spitze MINUS Schaft**“-Regel. Dabei möchten wir den Vektor \overrightarrow{AB} bestimmen, der vom Punkt A nach B geht. Der Punkt $B = (3|1)$ entspricht dabei der Spitze (=Endpunkt), der Punkt $A = (1|4)$ dem Schaft (=Anfangspunkt).

$$\text{Vektor} = \text{Endpunkt} - \text{Anfangspunkt}$$

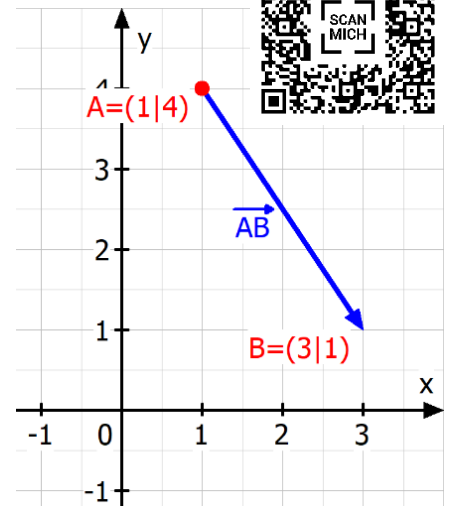
$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es gilt: \overrightarrow{BA} ist der **Gegenvektor** von \overrightarrow{AB} , d.h. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Bemerkung: Genau genommen sind bei dieser Berechnung A und B keine Punkte, sondern die Ortsvektoren \overrightarrow{OA} und \overrightarrow{OB} , da eine Subtraktion zweier Punkte keinen „Sinn“ ergeben würde. Zur Vereinfachung schreiben wir jedoch nur $B - A$.

Bsp. 8) Gegeben sind die Punkte $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 13 \\ -12 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $E = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Berechne die Vektoren.

Video



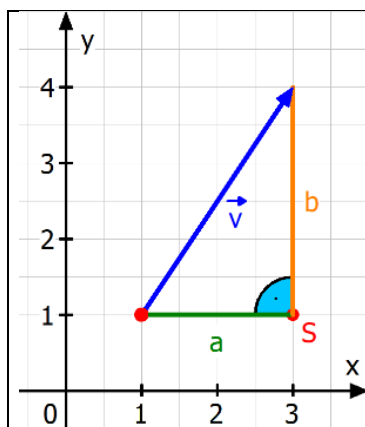
$\overrightarrow{AB} =$	$\overrightarrow{AD} =$	$\overrightarrow{EC} =$
$\overrightarrow{CD} =$	$\overrightarrow{BE} =$	$\overrightarrow{DB} =$



2.2 BETRAG EINES VEKTORS (= LÄNGE EINES VEKTORS)

Video

Mit Hilfe von Vektoren kann der Abstand zwischen zwei Punkten berechnet werden. Der Abstand zwischen diesen beiden Punkten entspricht der Länge des zugehörigen Vektors (=Betrag des Vektors):



Unter dem **Betrag eines Vektors** versteht man die **Länge des zugehörigen Pfeiles**. Dieser wird mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes berechnet. Es sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ein Vektor aus dem \mathbb{R}^2 , dann gilt für seinen Betrag:

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Beispiel: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} \approx 3,61$

Für einen **allgemeinen** Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ wird der Betrag analog berechnet: $|\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

Bsp. 9) Gegeben sind die Punkte $A = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $E = \begin{pmatrix} -14 \\ -14 \end{pmatrix}$. Berechne den Betrag.

$ \overline{AB} =$	$ \overline{AD} =$	$ \overline{EC} =$
$ \overline{CD} =$	$ \overline{BE} =$	$ \overline{DB} =$

2.3 ADDITION – GEOMETRISCHE INTERPRETATION

[Video](#)

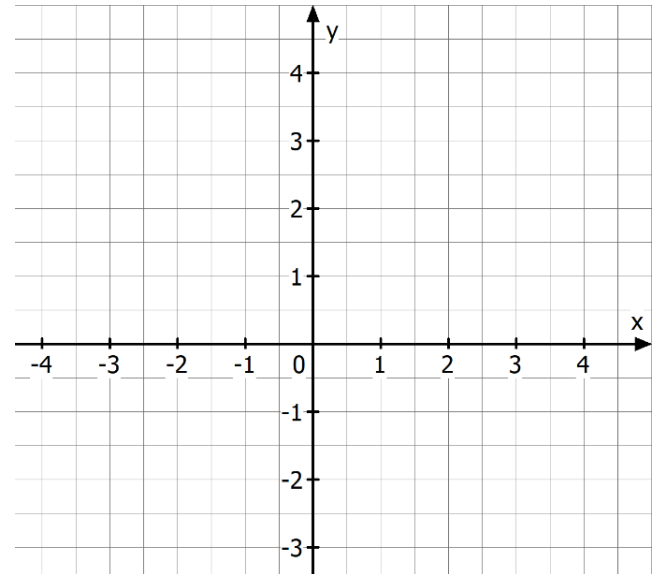
Die Addition zweier Vektoren kann auf zwei verschiedene Arten geometrisch gedeutet werden. Anhand des Beispiels $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ werden beide Optionen gezeigt:



Addition von Punkt UND Pfeil	Addition von Pfeil UND Pfeil
<div style="text-align: center;"> $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ </div> <p>An einem Punkt wird ein Pfeil angehängt. In unserem Beispiel wird an den Punkt $(1 2)$ ein Pfeil mit der Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ angehängt. Das Ergebnis der Addition ist der Punkt am Ende des Pfeils $(3 4)$.</p> <p style="text-align: center;">ERGEBNIS = PUNKT</p>	<div style="text-align: center;"> $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ </div> <p>Zwei Pfeile werden aneinandergehängt. In unserem Beispiel wird also ein Pfeil mit der Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und ein Pfeil mit der Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ aneinandergehängt. (beliebiger Startpunkt) Das Ergebnis der Addition ist der entstehende Verbindungspfeil mit der Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ – vom Schaft des ersten Pfeils bis zur Spitze des zweiten Pfeils.</p> <p style="text-align: center;">ERGEBNIS = PFEIL</p>
<div style="text-align: center;"> $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ </div>	<div style="text-align: center;"> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ </div>

Bsp. 10) Addiere die Vektoren geometrisch als **Addition** von **Punkt** und **Pfeil**. Gib die Koordinaten des Endpunktes an B_1 bzw. B_2 an. Kontrolliere rechnerisch.

a. $A_1 = (-3 -2), v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$	b. $A_2 = (4 4), v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$
---	--



Bsp. 11) Addiere die Vektoren geometrisch als **Addition** von **Pfeil** und **Pfeil**. Starte beim Punkt P und gib den entstehenden Vektor an.

$P = (-3 -2), \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v} = ?$	$P = (4 4), \vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{v} = ?$
--	---

2.4 SUBTRAKTION – GEOMETRISCHE INTERPRETATION

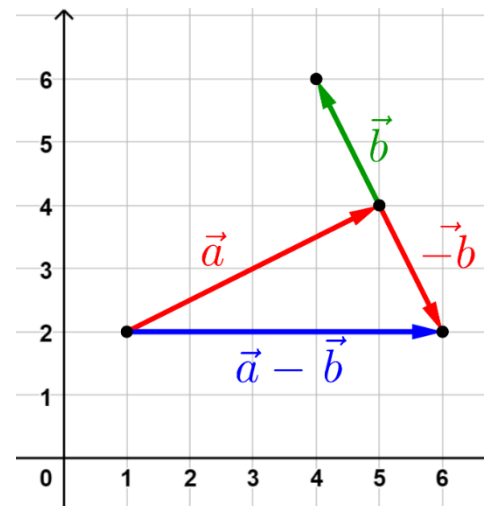
Die Subtraktion zweier Vektoren funktioniert analog zur Addition, jedoch wendet man folgenden Trick an:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$

Man verwandelt die **Subtraktion** in eine **Addition**:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(- \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

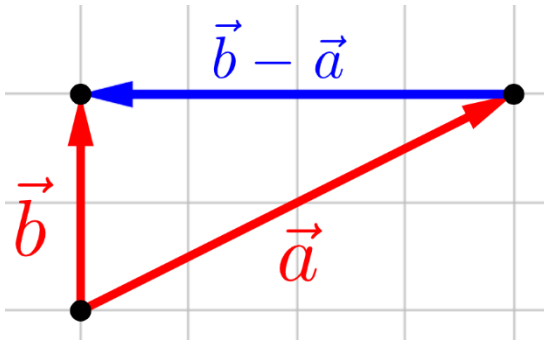
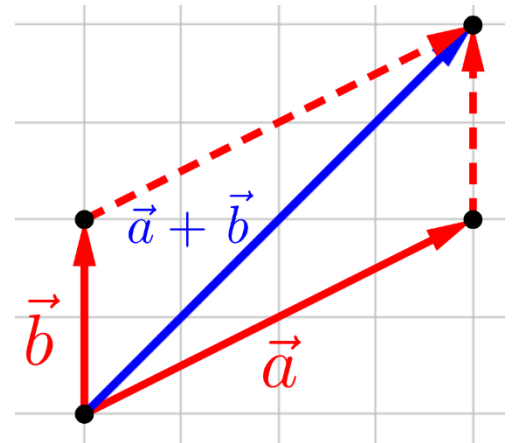


D.h. die Vorzeichen des 2.Vektors werden vertauscht (=Gegenvektor), sodass eine Vektoraddition entsteht.

Kurz gesagt: Die Subtraktion kann als Addition mit dem Gegenvektor dargestellt werden!!

2.5 PARALLELOGRAMMREGEL

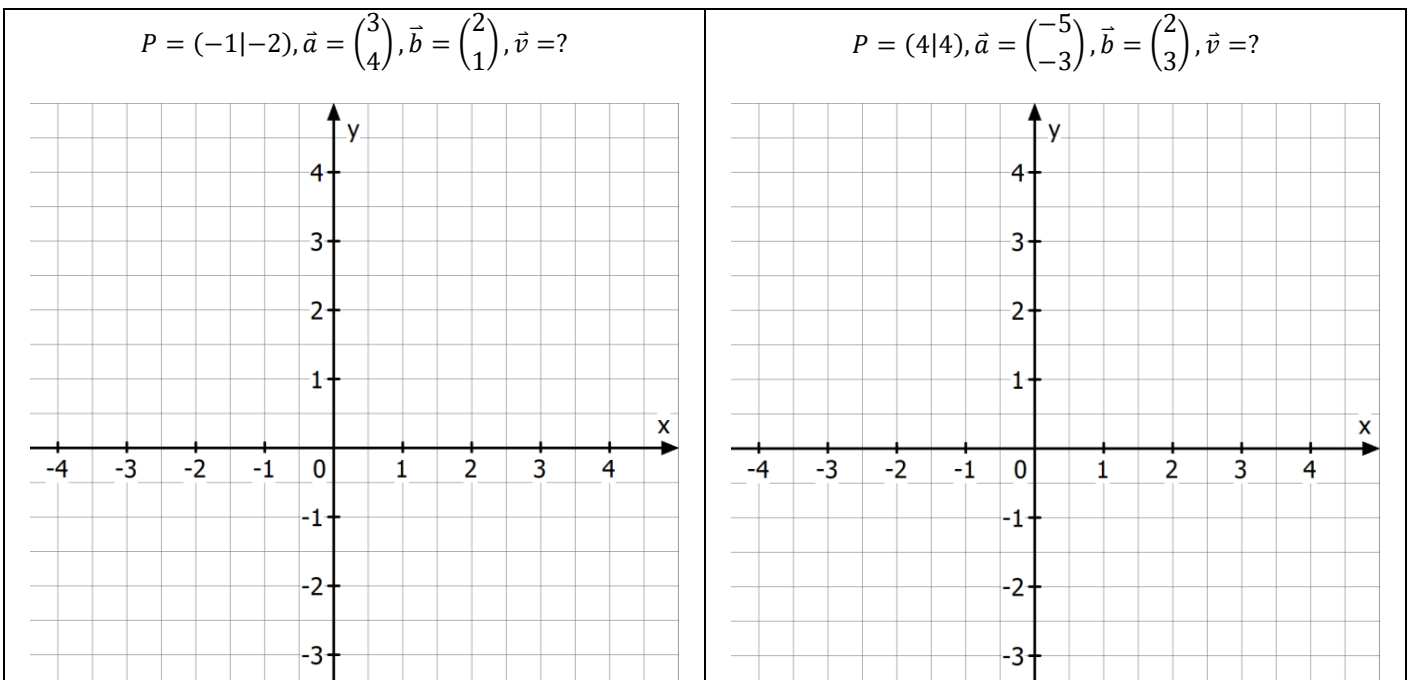
Die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ entspricht dem vom gemeinsamen Anfangspunkt ausgehenden Pfeil der Diagonale des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms.



2.6 DIFFERENZREGEL

Die Differenz $\vec{b} - \vec{a}$ entspricht dem Pfeil vom Endpunkt von \vec{a} zum Endpunkt von \vec{b} .

Bsp. 12) Subtrahiere die Vektoren $\vec{a} - \vec{b}$ geometrisch. Kontrolliere rechnerisch. **Interpretiere dein Ergebnis als Pfeil.**

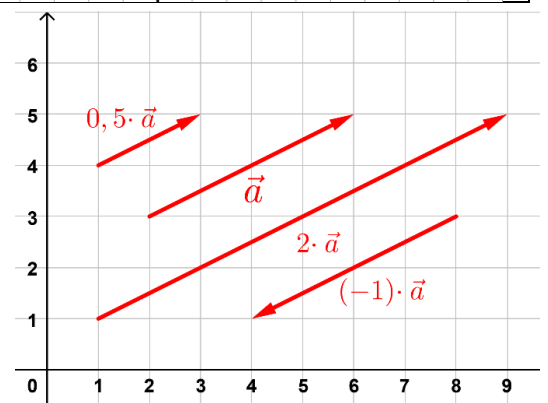


2.7 MULTIPLIZIEREN MIT EINEM SKALAR

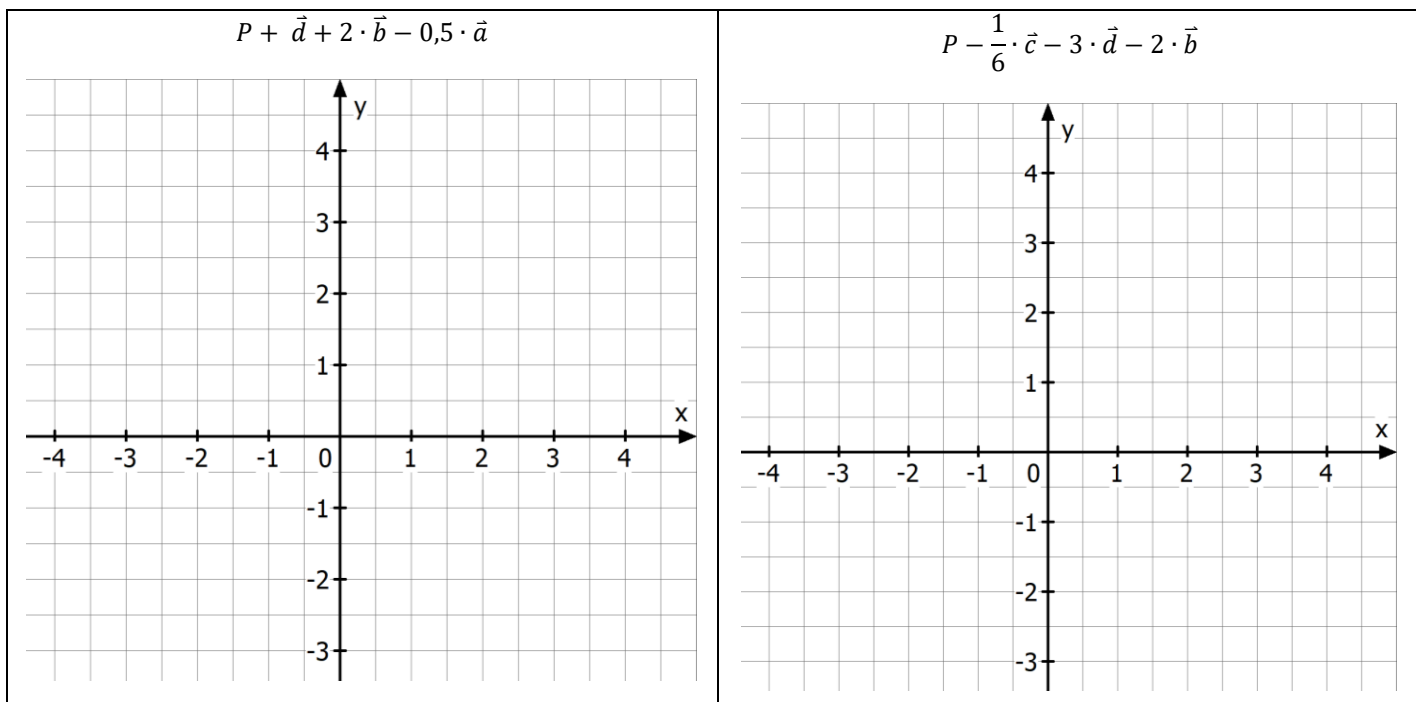
Eine Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl r (Skalar) entspricht einer **Streckung** (für $|r| > 1$) bzw. einer **Stauchung** (für $|r| < 1$) des zugehörigen Pfeiles.

Ist das **Vorzeichen** des Skalars **negativ**, so dreht sich die **Richtung des Pfeils** in die **entgegengesetzte Richtung**.

Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$: $2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ oder $0,5 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

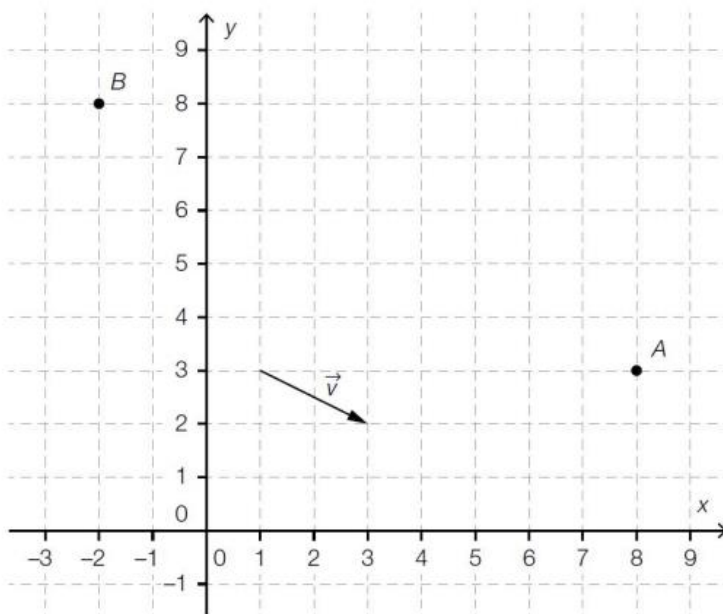


Bsp. 13) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P = (3|1)$. Stelle die Rechnungen **geometrisch** dar.



Darstellung im Koordinatensystem* - 1_712, AG3.3, Halboffenes Antwortformat

Im nachstehenden Koordinatensystem sind der Vektor \vec{v} sowie die Punkte A und B dargestellt. Die Komponenten des dargestellten Vektors \vec{v} und die Koordinaten der beiden Punkte A und B sind ganzzahlig.



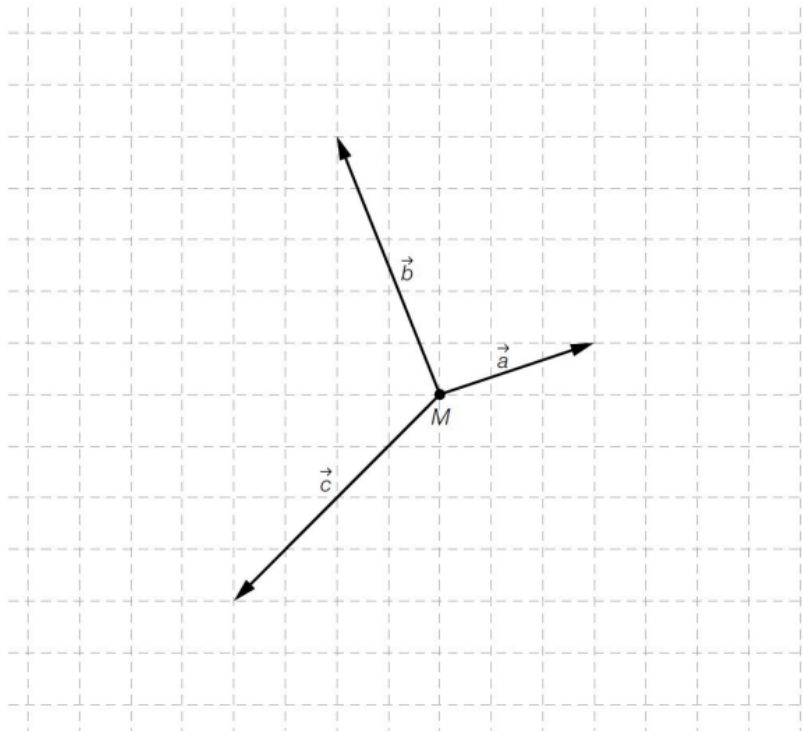
Bestimmen Sie den Wert des Parameters t so, dass die Gleichung $B = A + t \cdot \vec{v}$ erfüllt ist.

$t =$ _____

Kräfte* - 1_617, AG3.3, Konstruktionsformat

An einem Massenpunkt M greifen drei Kräfte an. Diese sind durch die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} gegeben.

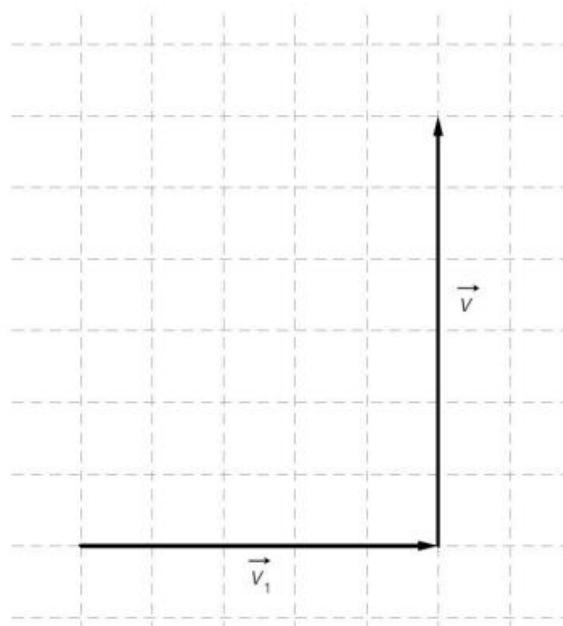
Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung einen Kraftvektor \vec{d} so ein, dass die Summe aller vier Kräfte (in jeder Komponente) gleich null ist!



Vektoraddition* - 1_489, AG3.3, Konstruktionsformat

Die unten stehende Abbildung zeigt zwei Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v} .

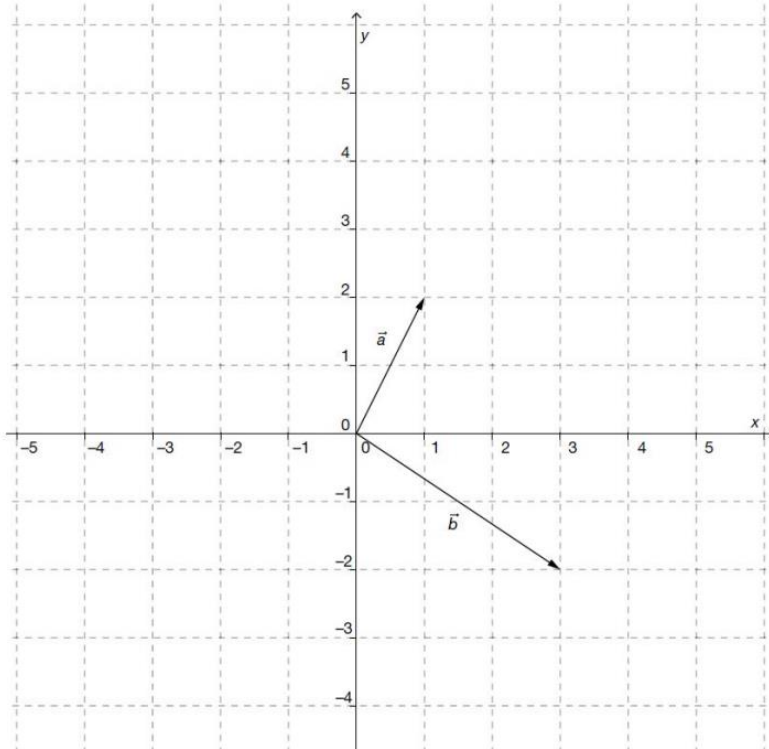
Ergänzen Sie in der Abbildung einen Vektor \vec{v}_2 so, dass $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}$ ist!



Vektoraddition* - 1_370, AG3.3, Konstruktionsformat

Gegeben sind die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

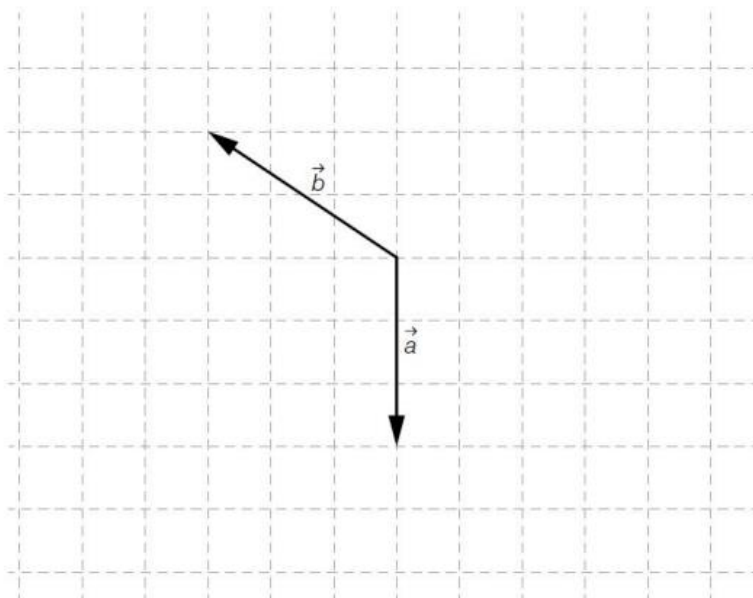
Stellen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Vektor \vec{s} mit $\vec{s} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$ als Pfeil dar!



Vektoren in der Ebene* - 1_570, AG3.3, Konstruktionsformat

Die unten stehende Abbildung zeigt zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

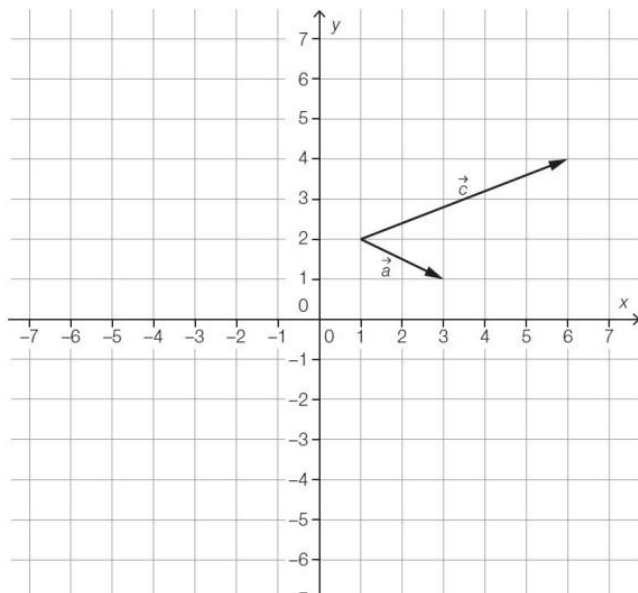
Zeichnen Sie in die Abbildung einen Vektor \vec{c} so ein, dass die Summe der drei Vektoren den Nullvektor ergibt, also $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt!



Vektoren* - 1_858, AG3.3, Konstruktionsformat

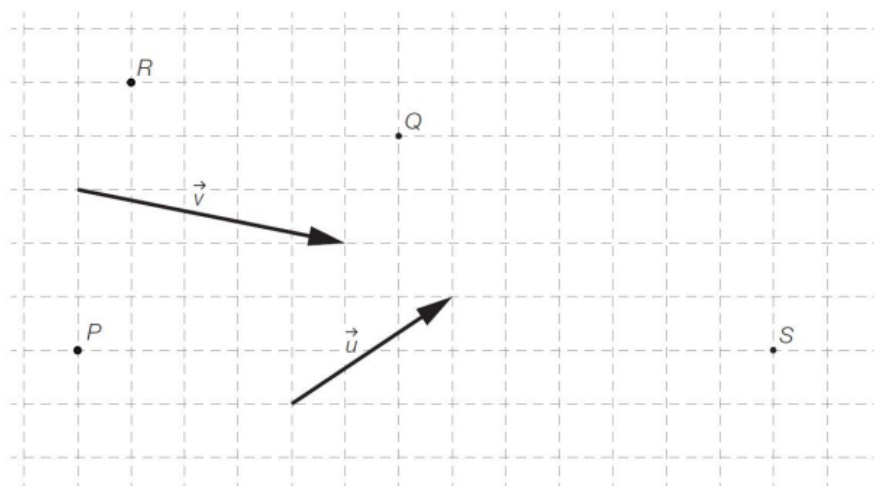
Im unten stehenden Koordinatensystem sind die Vektoren \vec{a} und \vec{c} eingezeichnet.
Es gilt: $\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$.

Zeichnen Sie den Vektor \vec{b} ein.



Vektoren* - 1_785, AG3.3, Zuordnungsformat

In der nachstehenden Abbildung sind die vier Punkte P , Q , R und S sowie die zwei Vektoren \vec{u} und \vec{v} dargestellt.



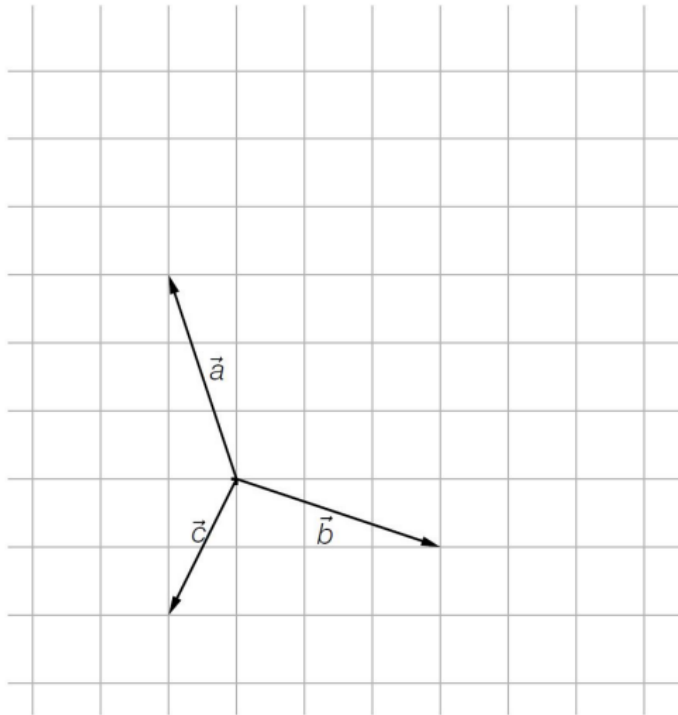
Ordnen Sie den vier Vektoren jeweils den entsprechenden Ausdruck (aus A bis F) zu.

\vec{PQ}	
\vec{PR}	
\vec{QR}	
\vec{PS}	

A	$2 \cdot \vec{u} - \vec{v}$
B	$2 \cdot \vec{v} - \vec{u}$
C	$-\vec{v}$
D	$2 \cdot \vec{v} + \vec{u}$
E	$2 \cdot \vec{u}$
F	$2 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v}$

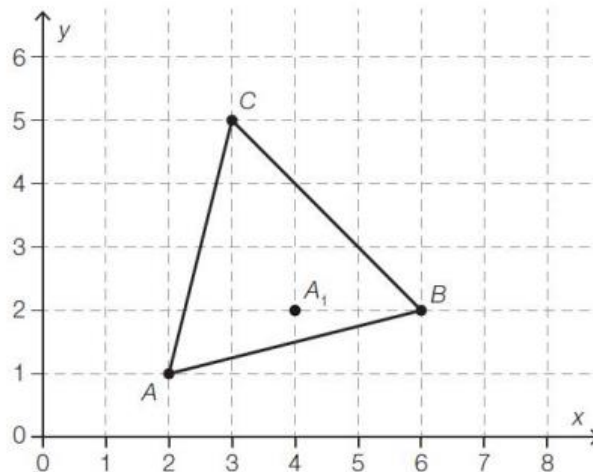
Vektoren* - 1_443, AG3.3, Konstruktionsformat

In der unten stehenden Abbildung sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} als Pfeile dargestellt. Stellen Sie den Vektor $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - 2 \cdot \vec{c}$ als Pfeil dar!



Dreieck verschieben* - 1_806, AG3.2, Halboffenes Antwortformat

In der nachstehenden Abbildung sind ein Dreieck mit den Eckpunkten A , B und C sowie der Punkt A_1 dargestellt. Die gekennzeichneten Punkte haben ganzzahlige Koordinaten.



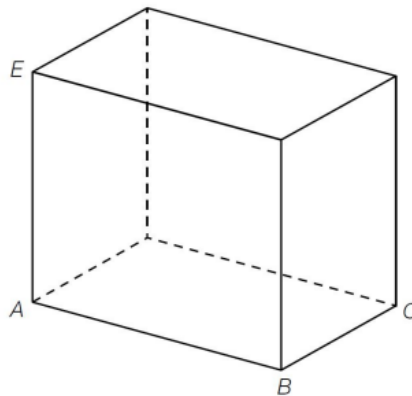
Das Dreieck soll so um den Vektor $\overrightarrow{AA_1}$ verschoben werden, dass die Punkte A , B und C in die Punkte A_1 , B_1 und C_1 übergehen.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C_1 .

$C_1 = (\quad | \quad)$

Eckpunkte eines Quaders* - 1_689, AG3.2, Konstruktionsformat

In der nachstehenden Abbildung ist ein Quader dargestellt. Die Eckpunkte A , B , C und E sind beschriftet.



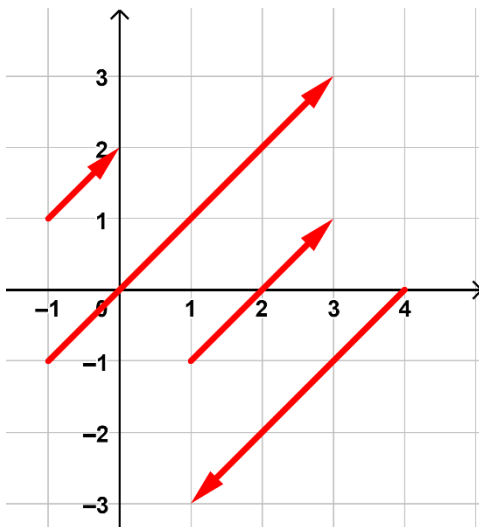
Für weitere Eckpunkte R , S und T des Quaders gilt:

$$R = E + \vec{AB}$$

$$S = A + \vec{AE} + \vec{BC}$$

$$T = E + \vec{BC} - \vec{AE}$$

Beschriften Sie in der oben stehenden Abbildung klar erkennbar die Eckpunkte R , S und T !



2.8 PARALLELITÄTSKRITERIUM:

[Video](#)



Zwei Vektoren nennt man **parallel**, wenn die zu den **Vektoren** **gehörenden Pfeile parallel** sind, d.h. wenn der eine **Vektor** ein **Vielfaches** des **anderen Vektors** ist -> Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind zueinander parallel, wenn es ein $k \neq 0$ gibt, sodass gilt:

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b}$$

Bsp. 14) Überprüfe, ob die Vektoren zueinander parallel sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ 24 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -6,5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Bsp. 15) Bestimme die fehlende Koordinate so, dass die beiden Vektoren zueinander parallel sind.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ -12 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 15 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 30 \end{pmatrix}$
--	---	---



2.9 MITTELPUNKT/TEILUNGSPUNKT EINER STRECKE

[Video](#)

Mit Hilfe von Vektoren kann man den **Mittelpunkt** einer Strecke AB bestimmen.

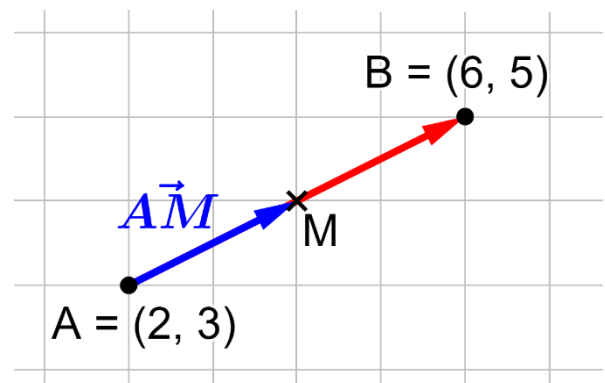
Mit den bekannten Mitteln ist dies recht einfach:

$$M_{AB} = A + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Durch Umformen erhalten wir folgende Form:

$$M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$$

Bsp. 16) Gegeben sind die Punkte $A = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $E = \begin{pmatrix} -14 \\ -14 \end{pmatrix}$. Berechne.



M_{AB}	M_{CE}	M_{BD}
----------	----------	----------

Teilungspunkt einer Strecke

Will man nun nicht den Mittelpunkt, sondern einen **beliebigen Teilungspunkt** bestimmen, muss man die Formel leicht abändern. Man addiert nun nicht $\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ zum Ausgangspunkt hinzu, sondern gerade das **Verhältnis**, welches gesucht ist.

Beispiel: Die Strecke AB soll in einem bestimmten Verhältnis geteilt werden. Geben Sie die Koordinaten des Teilungspunktes T an!

$$A(2|8), B(6|3) \rightarrow \text{Teilungsverhältnis } 1:3$$

Ein **Teilungsverhältnis von 1:3** bedeutet, dass die **Gesamtstrecke 4 Teilstücke** aufweist.

$$\vec{T} = \vec{A} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ (Teilungsverhältnis 1:3)}$$

$$\vec{T} = \vec{A} + \frac{4}{6} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ (Teilungsverhältnis 4:2)}$$

$$\vec{T} = \vec{A} + \frac{8}{21} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ (Teilungsverhältnis 8:13)}$$

Bsp. 17) Teile die Strecke AB im angegebenen Verhältnis und gib den Teilungspunkt an.

$A = (-5 -2), B = (7 2), 1:3$	$A = (3 4), B = (11 -4), 1:7$
-------------------------------	-------------------------------

2.10 WINKEL ZWISCHEN ZWEI VEKTOREN

Es sind 2 Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Nun bestimmen wir den Winkel, den die dazugehörigen Pfeile miteinander einschließen:

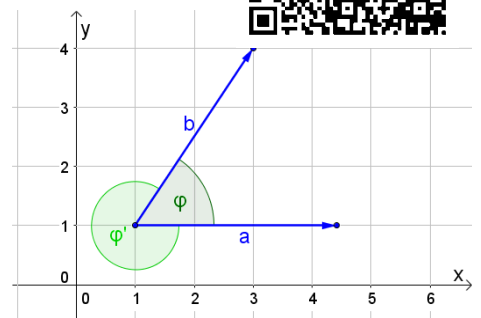
$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Zwei Vektoren schließen immer zwei Winkel φ und φ' miteinander ein. Bei Winkelberechnungen zwischen zwei Vektoren/Geraden ist immer der kleinere Winkel gemeint. Solltest du einmal ein Ergebnis erhalten, das größer als 180° ist (nennen wir dieses Ergebnis φ'), dann ziehe dieses Ergebnis von 360° ab und du erhältst den kleineren Winkel.

$$\varphi = 360^\circ - \varphi'$$

Bsp. 18) Berechne die Winkel zwischen den beiden Vektoren und kontrolliere mit einer Zeichnung.

Video



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
---	---	--

2.11 NORMALVEKTOREN

Video 10/11

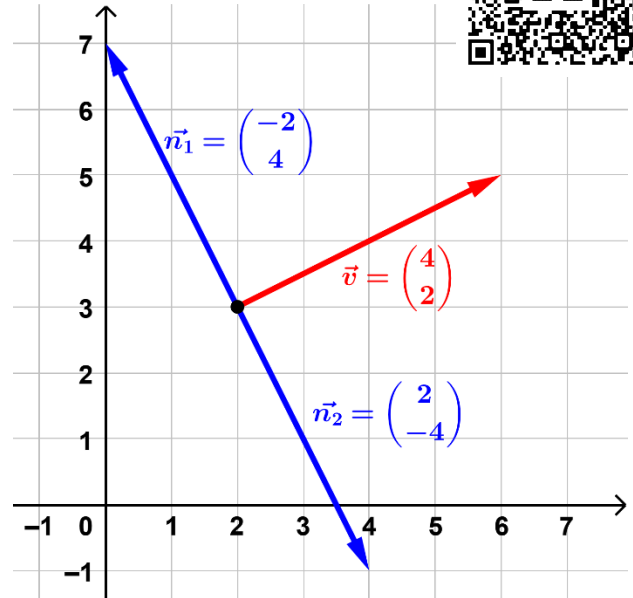


Die **Normalvektoren** zu einem Vektor sind alle Vektoren, die **normal** (im rechten Winkel) **auf den Vektor** stehen. Im \mathbb{R}^2 gibt es zu jedem Vektor **genau 2 Normalvektoren**, die **dieselbe Länge** wie der ursprüngliche Vektor haben. Alle anderen Normalvektoren sind Vielfache eines dieser 2 Normalvektoren.

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein Vektor, dann ist $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ sein nach links gekippter, und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ sein nach rechts gekippter Normalvektor.

Vertausche die Koordinaten und ändere ein Vorzeichen!

Bsp. 19) Bestimme die Normalvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 zum gegebenen Vektor.



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\vec{b} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ -12 \end{pmatrix}$	$\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 30 \end{pmatrix}$
--	---	--

Bsp. 20) Gegeben ist ein Vektor. Zeichne den Vektor, sowie die beiden zugehörigen Normalvektoren mit derselben Länge ins Koordinatensystem. Gib die Vektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 an. Überprüfe rechnerisch.

<p>$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ – Start im Punkt $P = (0 0)$</p>	<p>$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2,5 \end{pmatrix}$ – Start im Punkt $P = (0 0)$</p>
---	--

2.12 ORTHOGONALITÄTSKRITERIUM

Die Formel zur Winkelberechnung kann man folgendermaßen umformen:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad \leftarrow \boxed{\cos(90^\circ) = 0}$$

Daraus folgt: Bei einem Winkel von $\varphi = 90^\circ$ erhalten wir $\cos \varphi = 0$, sodass die rechte Seite $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ zu 0 wird. Aus dem Gleichheitszeichen folgt, dass auch $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ist. Daraus ergibt sich das **Orthogonalitätskriterium**:

Ergibt das Skalarprodukt zweier Vektoren 0, so stehen diese zwei Vektoren normal zueinander (und umgekehrt!)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Bemerkung: Mithilfe des Orthogonalitätskriteriums kann man auch zeigen, dass $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ stets ein Normalvektor von $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist:

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = xy - yx = 0$$

Bsp. 21) Überprüfe mit Hilfe des Orthogonalitätskriteriums, ob die beiden Vektoren zueinander normal sind.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 21 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 100 \\ -15 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -20 \end{pmatrix}$
--	--	---

Bsp. 22) Bestimme die fehlende Koordinate so, dass die beiden Vektoren zueinander normal sind.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$
---	---	--

Normalvektoren* - 1_393, AG3.3, 2 aus 5

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Kreuzen Sie die beiden Vektoren an, die auf \vec{a} normal stehen.

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>
$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>
$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>
$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>

Normalvektoren* - 1_466, AG3.3, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinate z_b des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z_b \end{pmatrix}$ so, dass \vec{a} und \vec{b} aufeinander normal stehen!

$z_b =$ _____

Orthogonale Vektoren* - 1_593, AG3.3, Offenes Antwortformat

Gegeben sind die nachstehend angeführten Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

Berechnen Sie x so, dass die Vektoren \vec{c} und \vec{d} aufeinander normal stehen!

Beziehung zwischen Vektoren* - 1_666, AG3.5, Halboffenes Antwortformat

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \cdot m \\ n \end{pmatrix}$ mit $m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} sollen aufeinander normal stehen. Geben Sie für diesen Fall n in Abhängigkeit von m an!

$n =$ _____

Quadrat* - 1_834, AG3.5, Halboffenes Antwortformat

Von einem Quadrat mit den Eckpunkten A, B, C und D sind der Eckpunkt $C = (5|-3)$ und der Schnittpunkt der Diagonalen $M = (3|1)$ gegeben. Die Eckpunkte A, B, C und D des Quadrats sind dabei gegen den Uhrzeigersinn angeordnet.

Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte A und B .

$A =$ _____

$B =$ _____

Normalvektor* - 1_441, AG3.5, Offenes Antwortformat

Gegeben sind die beiden Punkte $A = (-2|1)$ und $B = (3|-1)$.

Geben Sie einen Vektor \vec{n} an, der auf den Vektor \overrightarrow{AB} normal steht!

Normalvektoren* - 1_1182, AG3.5, 2 aus 5

Gegeben ist der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \cdot a \end{pmatrix}$ mit $a > 1$.

Kreuzen Sie die beiden Vektoren an, die normal auf \vec{v} stehen. [2 aus 5]

$\begin{pmatrix} -3 \cdot a \\ 7 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>
$\begin{pmatrix} 1,5 \cdot a \\ 3,5 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>
$\begin{pmatrix} -6 \cdot a^2 \\ -14 \cdot a \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>
$\begin{pmatrix} 1,5 \\ 3,5 \cdot a \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>
$\begin{pmatrix} 9 \cdot a^2 \\ -21 \cdot a \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>

Rechter Winkel* - 1_618, AG3.5, Offenes Antwortformat

Gegeben ist eine Strecke AB im \mathbb{R}^2 mit $A = (3|4)$ und $B = (-2|1)$.

Geben Sie einen möglichen Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{n} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ an, der mit der Strecke AB einen rechten Winkel einschließt!

Vektoren* - 1_417, AG3.5, Halboffenes Antwortformat

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die unbekannte Koordinate b_1 so, dass die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} normal aufeinander stehen!

$b_1 =$ _____