Grundkompetenz AG3: Vektoren und Geraden

Beispiele aus Maturaterminen 2022-24 (AHS, BHS, Kompensationsprüfungen AHS)

TYP-1:

Position eines Schiffes

Ein Schiff fährt an einem bestimmten Tag von 8:10 Uhr bis 8:30 Uhr mit konstanter Geschwindigkeit einen geradlinigen Kurs.

In einem kartesischen Koordinatensystem wird die Position dieses Schiffes um 8:10 Uhr durch den Punkt $A = (2|3)$ festgelegt, die Position um 8:30 Uhr durch den Punkt $B = (10|5)$.

Der Vektor $\vec{s}$ beschreibt die Veränderung der Position dieses Schiffes in einem Zeitintervall von 5 min.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Komponenten des Vektors $\vec{s}$ an.

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

Paralleler Vektor

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ein Vektor $\vec{b}$ soll zum Vektor $\vec{a}$ parallel sein und eine größere Länge als $\vec{a}$ haben.

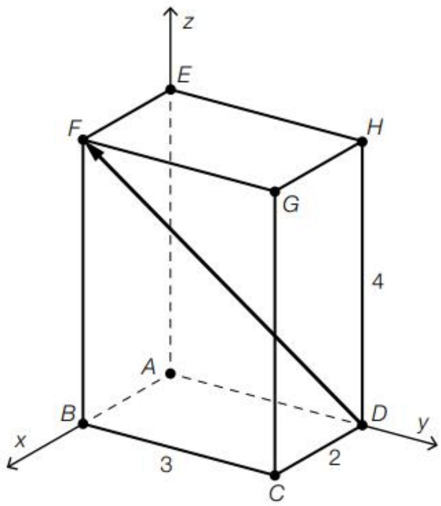
Aufgabenstellung:

Geben Sie die Komponenten eines möglichen Vektors $\vec{b}$ an.

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

Quader

In der nachstehenden Abbildung ist ein Quader *ABCDEFGH* in einem dreidimensionalen Koordinatensystem dargestellt. Die Längen der Kanten des Quaders können aus der Abbildung entnommen werden (Angaben in Zentimetern).



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{DF}$ an.

$$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

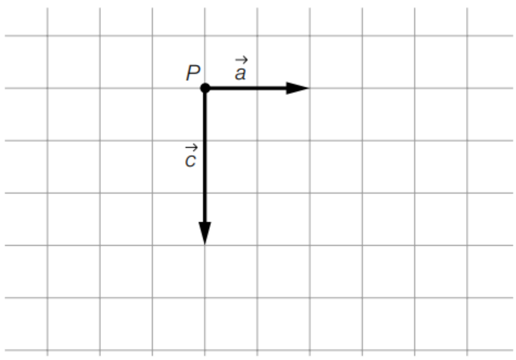
[0/1 P.]

Grafische Darstellung von Vektoren

In der unten stehenden Abbildung sind die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ als Pfeile ausgehend vom Punkt *P* dargestellt.

Aufgabenstellung:

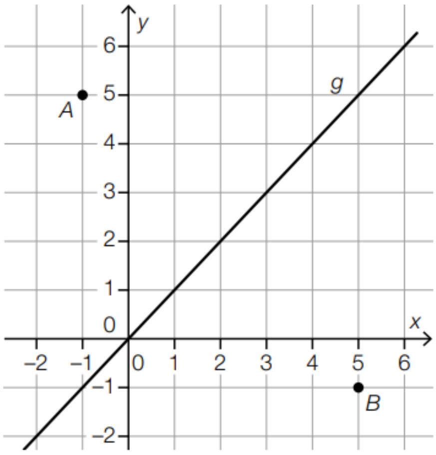
Zeichnen Sie ausgehend vom Punkt *P* den Vektor $\vec{b}$ als Pfeil so ein, dass gilt:
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$



Vektor und Gerade

In der unten stehenden Abbildung sind die Punkte A und B sowie die Gerade $g: y = x$ dargestellt.

Die Punkte A und B haben ganzzahlige Koordinaten.



Aufgabenstellung:

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Vektor $\overrightarrow{AB}$ normal auf die Gerade g steht.

Geradengleichungen

Gegeben sind die Geraden g und h mit den Gleichungen $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $h: X = \begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

Die Geraden g und h sind identisch.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die reellen Zahlen a und b.

a = ______________________________

b = ______________________________

[0/½/1 P.]

Vermietung

Alexander vermietet vier Wohnungen.
In der nachstehenden Tabelle sind die Bruttomieten und die Betriebskosten für ein bestimmtes Jahr angegeben.

	Bruttomiete (in €)	Betriebskosten (in €)
Wohnung 1	4800	1200
Wohnung 2	5500	1400
Wohnung 3	6000	1800
Wohnung 4	7000	1900

Die Spalten der Tabelle können als Vektoren angeschrieben werden. Dabei gibt der Vektor B die jeweiligen Bruttomieten und der Vektor K die jeweiligen Betriebskosten an.

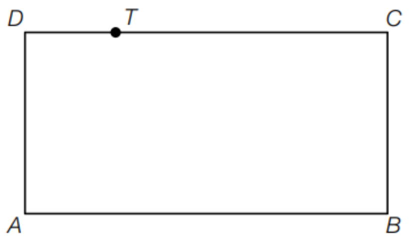
Die Bruttomieten sind die Summe aus Nettomieten und Betriebskosten. Der Gewinn (nach Abzug der Steuern) beträgt 60 % der Nettomieten.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Vektor G, dessen Komponenten Alexanders Gewinne aus der Vermietung der vier Wohnungen sind.

Teilungspunkt einer Rechteckseite

Nachstehend ist ein Rechteck mit den Eckpunkten A, B, C und D dargestellt. Der Punkt T teilt die Strecke CD im Verhältnis 3 : 1 (siehe nachstehende Abbildung).



Für den Punkt T gilt:
$T = A + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{DA}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie r und s.

r = ______________________________

s = ______________________________

Zwei Geraden im Raum

Gegeben sind zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^3$.

- $g: X = A + t \cdot \vec{a}$ mit $t \in \mathbb{R}$
- $h: X = B + s \cdot \vec{b}$ mit $s \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

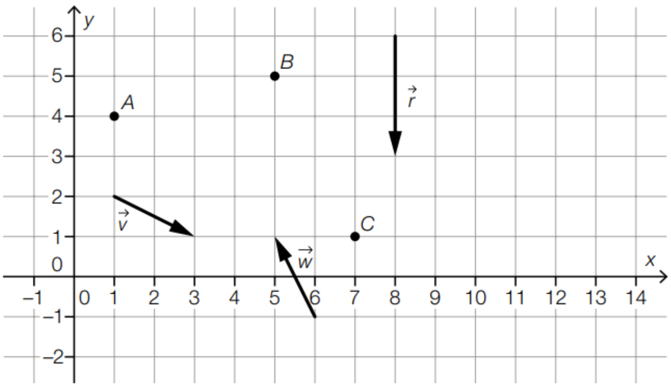
Falls ______①______ gilt, sind die Geraden g und h auf jeden Fall ______②______.

①	
$A \notin h$ und $\vec{a} = \vec{b}$	☐
$B \in g$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	☐
$\vec{a} = r \cdot \vec{b}$ mit $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $B \notin g$	☐

②	
schneidend	☐
identisch	☐
windschief	☐

Punkte und Vektoren

Im nachstehenden Koordinatensystem sind die drei Punkte A, B und C sowie die drei Vektoren $\vec{r}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ eingezeichnet.
Die Koordinaten der Punkte und die Komponenten der Vektoren sind ganzzahlig.



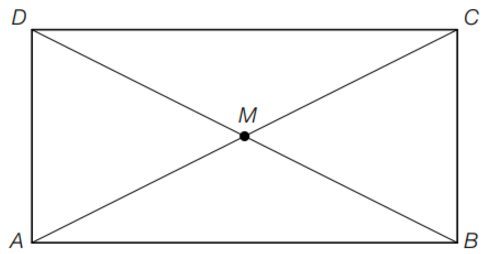
Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

$A = B + t \cdot \vec{r}$ für ein $t \in \mathbb{R}$	☐
$B = C + t \cdot \vec{v}$ für ein $t \in \mathbb{R}$	☐
$C = B + t \cdot \vec{w}$ für ein $t \in \mathbb{R}$	☐
$B = A + t \cdot \vec{w}$ für ein $t \in \mathbb{R}$	☐
$C = A + t \cdot \vec{v}$ für ein $t \in \mathbb{R}$	☐

Vektoren im Rechteck

Nachstehend ist ein Rechteck mit den Eckpunkten A, B, C und D dargestellt. Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen ist mit M bezeichnet.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD}$	☐
$\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CM}$	☐
$\frac{3}{5} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$	☐
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD}$	☐
$\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB}$	☐

Normale Geraden

Gegeben ist die Parameterdarstellung der Geraden g:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

Für eine Gerade n gilt:

- n steht normal auf g.
- n schneidet g im Punkt $P = (2|-4|9)$.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Gleichung einer solchen Geraden n in Parameterdarstellung auf.

$n\colon X =$ ______________________________

Punkt einer Geraden

Gegeben sind die Gerade g in $\mathbb{R}^3$ mit $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$,

und der Punkt $A = \begin{pmatrix} 10 \\ -19 \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Der Punkt A liegt auf der Geraden g.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie a.

$a =$ ____________________

Normalvektoren

Gegeben ist der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \cdot a \end{pmatrix}$ mit $a > 1$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Vektoren an, die normal auf $\vec{v}$ stehen. *[2 aus 5]*

$\begin{pmatrix} -3 \cdot a \\ 7 \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} 1,5 \cdot a \\ 3,5 \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} -6 \cdot a^2 \\ -14 \cdot a \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} 1,5 \\ 3,5 \cdot a \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} 9 \cdot a^2 \\ -21 \cdot a \end{pmatrix}$	☐

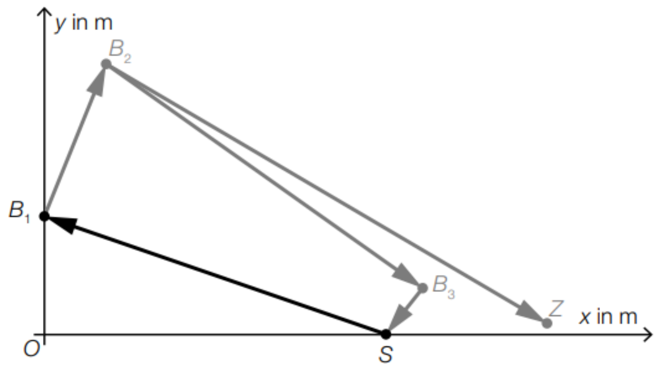
TYP-2:

Triathlon:

Triathlon ist ein Bewerb, bei dem die Sportlerinnen und Sportler einen Schwimmbewerb, einen Radbewerb und einen Laufbewerb in genau dieser Reihenfolge absolvieren.

Aufgabenstellung:

a) Der Verlauf der Schwimmstrecke eines bestimmten Triathlons ist in der nachstehenden Abbildung modellhaft dargestellt. Der Schwimmbewerb startet im Punkt S und endet im Punkt Z, dazwischen müssen die Kontrollpunkte B_1, B_2, B_3, S, B_1 und B_2 in genau dieser Reihenfolge erreicht werden.



Die Entfernung vom Punkt $S = (600|0)$ zum Punkt B_1 beträgt 700 m.

1) Berechnen Sie die y-Koordinate von B_1.

$B_1 = (0|\boxed{})$ *[0/1 P.]*

Kompensation AHS

https://www.mathago.at/kompensationspruefung-loesungen/

Mai 2023, Prüfung 5: Vektoren

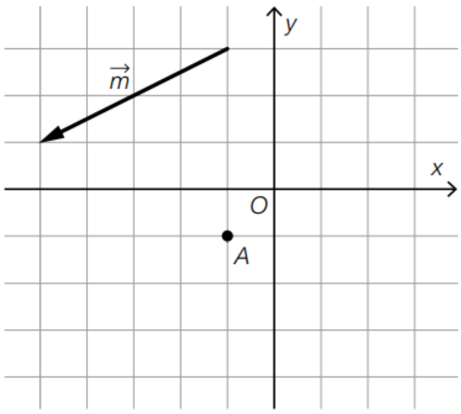
a) Eine Parameterdarstellung der Geraden g und der Punkt $P \in g$ sind gegeben.

$P = (-3{,}2 \mid 1{,}4)$

$g\colon X = \begin{pmatrix} 4 \\ c \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $c, t \in \mathbb{R}$

1) Ermitteln Sie c.

b) In der nachstehenden Abbildung sind der Punkt A und der Vektor $\vec{m}$ dargestellt.



1) Zeichnen Sie den Punkt B so ein, dass gilt: $B = A - 0{,}5 \cdot \vec{m}$

c) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} w \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ v \end{pmatrix}$ mit $v, w \in \mathbb{R}$.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Für alle $v, w \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ jedenfalls ___①___, wenn gilt: ___②___.

①	
parallel	☐
normal aufeinander	☐
gleich lang	☐

②	
$w = -2 \cdot v$	☐
$w = v$	☐
$2 \cdot w = v$	☐

Mai 2021, Prüfung 3: Lagebeziehung von Geraden

Gegeben sind die drei Geraden

$f\colon X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}$

$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ a \\ -2 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$

$h\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$

Es gilt: $a, b, c \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie a und b so, dass die Geraden f und g identisch sind.

Leitfrage:

Der Punkt $F = (-1\,|\,2\,|\,2)$ liegt auf der Geraden f. Der Punkt $H = (1\,|\,c\,|\,2)$ liegt auf der Geraden h. Die Geraden f und h schneiden einander, wenn $\overrightarrow{FH} = u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $u, v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt.

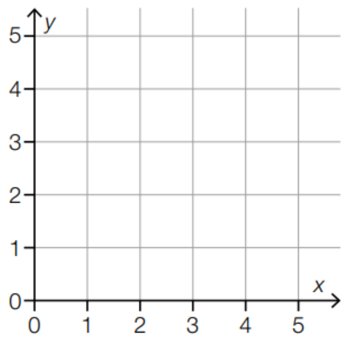
– Ermitteln Sie c so, dass die Geraden f und h einander schneiden.

Mai 2021, Prüfung 4: Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

– Zeichnen Sie in der unten stehenden Abbildung $\vec{w}$, $\vec{s}$ sowie $\vec{v} = \vec{w} + \vec{s}$ ausgehend vom Koordinatenursprung ein und geben Sie die Koordinaten von $\vec{v}$ an.



Leitfrage:

– Ermitteln Sie die Länge v des Vektors $\vec{v}$.

– Ermitteln Sie denjenigen Winkel α, den der Vektor $\vec{v}$ mit der x-Achse einschließt.

Mai 2021, Prüfung 5: Normale Geraden

Gegeben sind die Geraden $g\colon X = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$ und $h\colon X = \begin{pmatrix} a \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ b \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie b so, dass die Richtungsvektoren der beiden Geraden normal aufeinander stehen.

Leitfrage:

Die beiden aufeinander normal stehenden Geraden g und h schneiden einander im Punkt S.

– Ermitteln Sie a.

– Ermitteln Sie die Koordinaten von S.

Mai 2021, Prüfung 8: Zwei Flugzeuge

Zwei Flugzeuge fliegen mit jeweils konstanter Geschwindigkeit.
Ihre Flugstrecken können in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem dargestellt werden.

Das erste Flugzeug bewegt sich zwischen 10:00 Uhr und 10:30 Uhr entlang der Geraden g_1.
Um 10:00 Uhr befindet es sich im Punkt $(-100|100|6)$.
Um 10:30 Uhr befindet es sich im Punkt $(200|-80|6)$.

Aufgabenstellung:

– Stellen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g_1 der Form $g_1\colon X = P + t \cdot \vec{g}_1, t \in \mathbb{R}$ auf.
Dabei gibt $t \in [0; 30]$ die Anzahl der Minuten an, die seit 10:00 Uhr vergangen sind.

Leitfrage:

Das zweite Flugzeug bewegt sich zwischen 10:00 Uhr und 10:30 Uhr entlang der Geraden g_2 mit $g_2\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$. Dabei gibt $s \in [0; 30]$ die Anzahl der Minuten an, die seit 10:00 Uhr vergangen sind.

– Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Geraden und begründen Sie, warum es zu keinem Zusammenstoß der beiden Flugzeuge kommt.