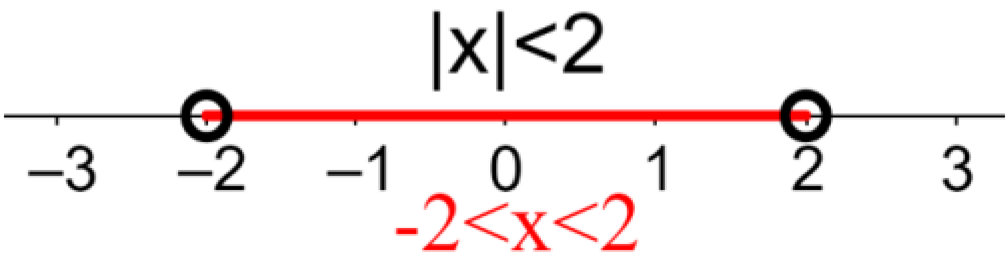
AG1 – Grundbegriffe der Algebra

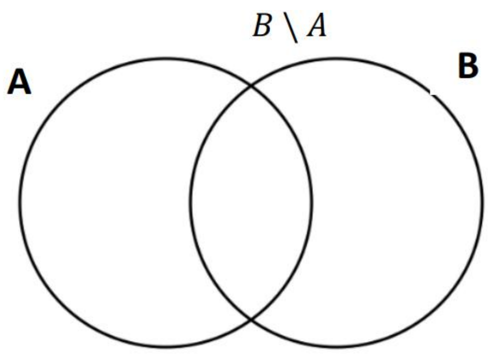
Maturaskript AHS (12 Seiten)

Theoretische Erklärungen und Beispielaufgaben zu **folgenden Themenbereichen**:

- **AG 1.1** Wissen über die Zahlenmengen, -bereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können

- **AG 1.2** Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variablen, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit





Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. πegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

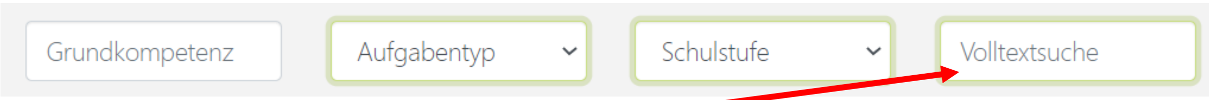
Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M

2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



Angestelltengehalt* 1_578, AN1.1, Offenes Antwortformat

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

AG1 – Grundbegriffe der Algebra

Zahlenmengen

Video 1

1. Bekannte Zahlenmengen

- Menge der **natürlichen Zahlen**: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Menge der **ganzen Zahlen**: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Menge der **rationalen Zahlen**: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

  Alle rationalen Zahlen können als **Bruch** dargestellt werden. Ein Bruch kann immer in eine endliche oder periodische (unendlich lang, aber periodisch) **Dezimalzahl** umgewandelt werden.

➢ **Endliche Dezimalzahlen**: $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $\frac{4}{2} = 2$; $\frac{3}{10} = 0{,}3$

➢ **Unendliche, periodische** Dezimalzahlen:
  - Rein periodisch: $\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots = 0{,}\dot{3}$ (Alle Ziffern der Dezimalstellen wiederholen sich)
  - Gemischt periodisch: $\frac{5}{6} = 0{,}83333\ldots = 0{,}8\dot{3}$ (es gibt Ziffern hinter dem Komma, die nicht periodisch sind.)

- **Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$:**

Irrationale Zahlen sind **nicht periodisch**, jedoch **unendlich lang**. Irrationale Zahlen entstehen oft in Kombination mit einer **Wurzel** (z.B. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$). Zudem sind bereits bestimmte Zahlen, die unendlich lange sind, definiert wie die **Kreiszahl Pi** ($\pi = 3{,}14159\ldots$) oder die **Eulersche Zahl** ($e = 2{,}7182\ldots$).

Um irrationale Zahlen in Zusammenhang mit einer Wurzel erkennen zu können, ist es wichtig, die Quadratzahlen zu kennen:

➢ Die **Wurzel einer Quadratzahl** ergibt stets eine **natürliche** Zahl.

➢ Die **Wurzel keiner Quadratzahl** ergibt stets eine **irrationale** Zahl.

<u>Quadratzahlen</u>: $\mathbf{1} = 1^2, \mathbf{4} = 2^2, \mathbf{9} = 3^2, \mathbf{16}, \mathbf{25}, \mathbf{36}, \mathbf{49}, \mathbf{64}, \mathbf{81}, \mathbf{100}, \mathbf{121}, \mathbf{144}, \mathbf{169}, \mathbf{196}, \mathbf{225}, \dots$

$\sqrt{\mathbf{1}} = 1 \in \mathbb{N}$

$\sqrt{2} = 1{,}41\ldots \in \mathbb{I}$

$\sqrt{3} = 1{,}73\ldots \in \mathbb{I}$

$\sqrt{\mathbf{4}} = 2 \in \mathbb{N}$

$\sqrt{17} = 4{,}12\ldots \in \mathbb{I}$

$\sqrt{\mathbf{36}} = 6 \in \mathbb{N}$

Wurzeln von **Quadratzahlen** führen stets zu **natürlichen** Zahlen!!!

Wurzeln von **keinen Quadratzahlen** führen stets zu **irrationalen** Zahlen!!!

<u>Bemerkung</u>: Ist in einer Rechenoperation eine irrationale Zahl enthalten, so bleibt das **Ergebnis irrational,** sofern die irrationale Zahl nicht wegfällt!

$3 \cdot \sqrt{2}\ldots \in \mathbb{I}$ $\qquad \frac{\sqrt{15}}{3}\ldots \in \mathbb{I}$ $\qquad 7 \cdot \pi\ldots \in \mathbb{I}$ $\qquad \pi^2\ldots \in \mathbb{I}$

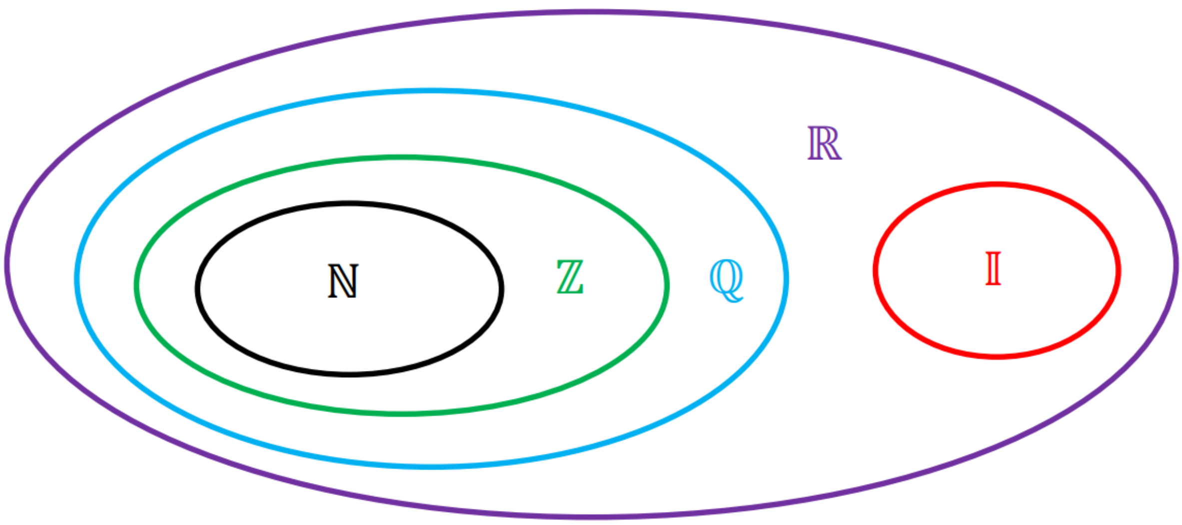
<u>Ausnahme:</u> $\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \in \mathbb{N}$

Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Die reellen Zahlen ergeben sich aus den rationalen Zahlen (endliche & periodische Dezimalzahlen) UND den irrationalen Zahlen (nicht periodische, unendliche Dezimalzahlen)

	Reelle Zahlen	
	Rationale Zahlen	**Irrationale Zahlen**
Bruchdarstellung	möglich	Nicht möglich
Dezimaldarstellung	endlich oder periodisch	unendlich, aber nicht periodisch

Graphische Darstellung der Zahlenmengen:



- ⇨ Jede natürliche Zahl (z.B. 3) ist eine ganze Zahl, eine rationale Zahl ($3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} =$..) sowie eine reelle Zahl.
- ⇨ Jede ganze Zahl (z.B. -4 oder 5) ist eine rationale und reelle Zahl.
- ⇨ Jede rationale Zahl (z.B. 4,3) ist eine reelle Zahl.
- ⇨ Jede irrationale Zahl (z.B. $\sqrt{2}$) ist eine reelle Zahl.

Video 2

Bsp. 1) Ordne den folgenden Zahlen jeweils die **kleinstmögliche Zahlenmenge** ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$) zu:

$\frac{3}{1}$		$\sqrt{9}$		$1\frac{15}{15}$	
-2		$\frac{1}{7}$		$3,\dot{5}$	
$\frac{3}{2}$		$\sqrt{11}$		$-\sqrt{16}$	
$\frac{\pi}{3,14}$		$-\frac{4}{8}$		$\frac{1}{19}$	
$\frac{4}{2}$		$1,1236$		$\sqrt{3}$	
$-\frac{2}{3}$		$\frac{3}{\sqrt{8}}$		$\frac{0}{2}$	
$3,2$		$-\sqrt{9}$		$\frac{7}{7}$	
$-\frac{2}{1}$		$\frac{16}{8}$		$3,\dot{5}$	

$\frac{5}{3}$		$\sqrt{100}$		$\sqrt{27}$	
$0,\dot{3}$		$\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}$		$\frac{\sqrt{11}}{13}$	
$\sqrt{2}$		-1009		$\sqrt{3^2}$	
13^2		π		$\sqrt{2^3}$	

Bsp. 2) Ordne den folgenden Zahlen alle Zahlenmengen ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$) zu, in denen sie enthalten sind.

-3	$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{19}$	
$\frac{100}{50}$		$1{,}2236$		$-\sqrt{9}$	
$-\frac{0}{3}$		$\sqrt{18}$		$\frac{0}{2}$	
$0,\dot{6}$		$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}$		$\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$	
$\sqrt{23}$		-4		$\sqrt{10^2}$	
5^2-6^2		$\frac{\pi}{3}$		$\sqrt{4^3}$	

Ausblick: Welche Zahlen bzw. Rechnungen können mit den reellen Zahlen **<u>nicht</u>** dargestellt werden?

In den reellen Zahlen können keine **Wurzeln** aus **negativen Zahlen** berechnet werden. Aus diesem Grund erweitert man die reellen Zahlen mit allen negativen Wurzeln und nennt die **imaginären Zahlen die Menge der negativen Wurzeln**.

$$Beispiele: \sqrt{-1}, \sqrt{-5} \ \ldots KEINE\ reellen\ Zahlen!$$

<u>Menge der komplexen Zahlen</u>: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erhält man, wenn man die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die imaginären Zahlen zusammenfügt.

Aussagen über Zahlen* - 1_469, AG1.1, 2 aus 5

Gegeben sind Aussagen über Zahlen.

Welche der im Folgenden angeführten Aussagen gelten? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Jede reelle Zahl ist eine irrationale Zahl.	☐
Jede reelle Zahl ist eine komplexe Zahl.	☐
Jede rationale Zahl ist eine ganze Zahl.	☐
Jede ganze Zahl ist eine natürliche Zahl.	☐
Jede natürliche Zahl ist eine reelle Zahl.	☐

Aussagen über Zahlenmengen* - 1_373, AG1.1, 2 aus 5

Untenstehend sind fünf Aussagen über Zahlen aus den Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ angeführt.

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die korrekt sind!

Reelle Zahlen mit periodischer oder endlicher Dezimaldarstellung sind rationale Zahlen.	☐
Die Differenz zweier natürlicher Zahlen ist stets eine natürliche Zahl.	☐
Alle Wurzelausdrücke der Form $\sqrt{a}$ für $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ sind stets irrationale Zahlen.	☐
Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen a, b existiert stets eine weitere rationale Zahl.	☐
Der Quotient zweier negativer ganzer Zahlen ist stets eine positive ganze Zahl.	☐

Differenz zwischen zwei natürlichen Zahlen* - 1_854, AG1.1, Offenes Antwortformat

Für zwei natürliche Zahlen n und m gilt: $n \neq m$.

Damit die Differenz $n - m$ eine natürliche Zahl ist, muss eine bestimmte mathematische Beziehung zwischen n und m gelten.

Geben Sie diese mathematische Beziehung an.

Eigenschaften von Zahlen* - 1_517, AG1.1, 2 aus 5

Nachstehend sind Aussagen über Zahlen und Zahlenmengen angeführt.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Quadratwurzel jeder natürlichen Zahl ist eine irrationale Zahl.	☐
Jede natürliche Zahl kann als Bruch in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ dargestellt werden.	☐
Das Produkt zweier rationaler Zahlen kann eine natürliche Zahl sein.	☐
Jede reelle Zahl kann als Bruch in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ dargestellt werden.	☐
Es gibt eine kleinste ganze Zahl.	☐

Positive rationale Zahlen* - 1_349, AG1.1, 2 aus 5

Gegeben ist die Zahlenmenge $\mathbb{Q}^+$.

Kreuzen Sie die beiden Zahlen an, die Elemente dieser Zahlenmenge sind!

$\sqrt{5}$	☐
$0{,}9 \cdot 10^{-3}$	☐
$\sqrt{0{,}01}$	☐
$\frac{\pi}{4}$	☐
$-1{,}41 \cdot 10^{3}$	☐

Rationale Zahlen* - 1_129, AG1.1, 2 aus 5

Gegeben sind folgende Zahlen: $-\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{5}$; $3,\dot{5}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{-1}$.

Kreuzen Sie die beiden rationalen Zahlen an.

$-\frac{1}{2}$	☐
$\frac{\pi}{5}$	☐
$3,\dot{5}$	☐
$\sqrt{3}$	☐
$\sqrt{-1}$	☐

Rechenoperationen* - 1_782, AG1.1, 2 aus 5

Gegeben sind zwei natürliche Zahlen a und b, wobei gilt: $b \neq 0$.
Kreuzen Sie die beiden Ausdrücke an, die auf jeden Fall eine natürliche Zahl als Ergebnis liefern.

$a + b$	☐
$a - b$	☐
$\frac{a}{b}$	☐
$a \cdot b$	☐
$\sqrt[a]{b}$	☐

Zahlen den Zahlenmengen zuordnen* - 1_397, AG1.1, 2 aus 5

Gegeben sind Aussagen zu Zahlen.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Die Zahl $-\frac{1}{3}$ liegt in $\mathbb{Z}$, aber nicht in $\mathbb{N}$.	☐
Die Zahl $\sqrt{-4}$ liegt in $\mathbb{C}$.	☐
Die Zahl $0,\dot{9}$ liegt in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{Q}$.	☐
Die Zahl π liegt in $\mathbb{R}$.	☐
Die Zahl $-\sqrt{7}$ liegt nicht in $\mathbb{R}$.	☐

Zahlen und Zahlenmengen* - 1_758, AG1.1, 2 aus 5

Gegeben sind fünf Aussagen zu Zahlen und Zahlenmengen.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

$\sqrt{\frac{9}{2}}$ ist eine rationale Zahl.	☐
$-\sqrt{100}$ ist eine ganze Zahl.	☐
$\sqrt{15}$ hat eine endliche Dezimaldarstellung.	☐
$\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.	☐
-4 ist kein Quadrat einer reellen Zahl.	☐

Zahlen und Zahlenmengen* - 1_662, AG1.1, 2 aus 5

Nachstehend sind Aussagen über Zahlen und Zahlenmengen angeführt.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Es gibt mindestens eine Zahl, die in $\mathbb{N}$ enthalten ist, nicht aber in $\mathbb{Z}$.	☐
$-\sqrt{9}$ ist eine irrationale Zahl.	☐
Die Zahl 3 ist ein Element der Menge $\mathbb{Q}$.	☐
$\sqrt{-2}$ ist in $\mathbb{C}$ enthalten, nicht aber in $\mathbb{R}$.	☐
Die periodische Zahl $1,\dot{5}$ ist in $\mathbb{R}$ enthalten, nicht aber in $\mathbb{Q}$.	☐

Zahlenmengen* - 1_566, AG1.1, 2 aus 5

Untenstehend werden Aussagen über Zahlen aus den Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ getroffen.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Jede reelle Zahl ist eine rationale Zahl.	☐
Jede natürliche Zahl ist eine rationale Zahl.	☐
Jede ganze Zahl ist eine reelle Zahl.	☐
Jede rationale Zahl ist eine ganze Zahl.	☐
Jede komplexe Zahl ist eine reelle Zahl.	☐

Zahlenmengen* - 1_638, AG1.1, 2 aus 5

Nachstehend sind Aussagen über Zahlen aus den Mengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ angeführt.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Irrationale Zahlen lassen sich in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ darstellen.	☐
Jede rationale Zahl kann in endlicher oder periodischer Dezimalschreibweise geschrieben werden.	☐
Jede Bruchzahl ist eine komplexe Zahl.	☐
Die Menge der rationalen Zahlen besteht ausschließlich aus positiven Bruchzahlen.	☐
Jede reelle Zahl ist auch eine rationale Zahl.	☐

Rationale Zahlen* - 1_830, AG1.2, 2 aus 5

Nachstehend sind Aussagen über rationale Zahlen gegeben.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Für alle rationalen Zahlen a und b gilt: $a + b \geq 0$.	☐
Zu jeder rationalen Zahl a gibt es eine rationale Zahl b so, dass gilt: $a + b = 0$.	☐
Es gibt rationale Zahlen a und b mit $a \cdot b < b$.	☐
Wenn von den beiden rationalen Zahlen a und b, $b \neq 0$, genau eine positiv ist, dann ist der Quotient $\frac{a}{b}$ auf jeden Fall positiv.	☐
Wenn von den beiden rationalen Zahlen a und b mindestens eine negativ ist, dann ist das Produkt $a \cdot b$ auf jeden Fall negativ.	☐

Definitionsmenge eines Terms

Was darf nicht passieren:

- **Nenner** eines Bruches darf NICHT 0 sein!
- **Wurzeln** dürfen NICHT negativ sein!

Für jeden Term gibt es folgende Mengen:

- Die **Definitionsmenge** (kurz D) ist die **Menge derjenigen reellen Zahlen**, für die der Term einen Wert annimmt bzw. die in den **Term eingesetzt werden dürfen**. (Aufpassen bei **Division**, **Wurzel**)

  z.B.: $T(x) = \frac{1}{x+1}$ -> $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ (nicht durch Null dividieren)

  Bemerkung: $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ bedeutet, dass in den Term $T(x) = \frac{1}{x+1}$ alle reellen Zahlen außer -1 eingesetzt werden dürfen!!! Würde man -1 einsetzen, wäre der Nenner gleich 0.

Video

- Die **Wertemenge** (kurz W) ist die Menge aller angenommenen Werte von T.

Video

Bsp. 3) Bestimme die **größtmögliche Definitionsmenge** des Terms im Raum der reellen Zahlen.

a. $T(v) = \frac{1}{v}$	b. $T(b) = \frac{5b+2}{4b-24}$	c. $T(x) = \frac{1}{(x-1)\cdot(x+3)}$
d. $T(u) = \sqrt{u-3}$	e. $T(x) = \sqrt{2x-4}$	f. $T(x) = \frac{1}{(2x-1)\cdot(7x+6)}$

Definitionsmengen* - 1_372, AG1.2, Zuordnungsformat

Es sind vier Terme und sechs Mengen (A bis F) gegeben.
Ordnen Sie den vier Termen jeweils die entsprechende größtmögliche Definitionsmenge $D_A, D_B, \ldots, D_F$ in der Menge der reellen Zahlen zu!

$\ln(x+1)$	
$\sqrt{1-x}$	
$\frac{2x}{x \cdot (x+1)^2}$	
$\frac{2x}{x^2+1}$	

A	$D_A = \mathbb{R}$
B	$D_B = (1; \infty)$
C	$D_C = (-1; \infty)$
D	$D_D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$
E	$D_E = (-\infty; 1)$
F	$D_F = (-\infty; 1]$

Lösung einer Gleichung* - 1_807, AG1.2, 1 aus 6

Nachstehend ist eine Gleichung in $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

$\sqrt{2 \cdot x - 6} = a$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$
Kreuzen Sie dasjenige Intervall an, das für alle Werte von $a \in \mathbb{R}_0^+$ die Lösung der gegebenen Gleichung enthält.

$(-\infty; -3]$	☐
$[3; \infty)$	☐
$[-3; 0)$	☐
$[0; 3)$	☐
$[-6; -3)$	☐
$[3; 6]$	☐

Potenzen und Wurzeln

Video

Definition: Eine Potenz besteht aus einer <u>Basis</u> und einer <u>Hochzahl</u>, dem sogenannten Exponenten:

Exponent

a^n }Potenz

Basis

Für a^n gilt: $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \; (n - Faktoren)$

Bei den folgenden Überlegungen sind die Variablen a, b, n, m, x und y reelle Zahlen. Es gibt insgesamt sieben Potenzregeln, auf die ihr beim Rechnen achten müsst:

REGEL 1	Potenzen mit **derselben Basis** werden **multipliziert**, indem man die **Exponenten addiert**. $\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$	
	$x^2 \cdot x^3 = x^5$	$a^2 \cdot b^2 \cdot a = a^3 b^2$

REGEL 2	Potenzen mit **derselben Basis** werden **dividiert**, indem man die **Exponenten subtrahiert**. $\boldsymbol{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$	
	$\frac{x^3}{x} = x^{3-1} = x^2$	$\frac{a^2 \cdot a}{a^4} = \frac{a^3}{a^4} = a^{3-4} = a^{-1}$

REGEL 3	Potenzen werden **potenziert**, indem man die **Exponenten multipliziert**. $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$	
	$(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$	$(a^2)^2 \cdot a^3 = a^{2 \cdot 2} \cdot a^3 = a^4 \cdot a^3 = a^7$

REGEL 4	Eine Zahl a hoch 0 ergibt immer 1, solange a ungleich 0 ist. Der Term 0^0 ist nicht definiert. $\boldsymbol{a^0 = 1 \text{ für } a \neq 0}$	
	$3^0 = 1$	$123012^0 = 1$

REGEL 5	**Verschiebt** man eine **Potenz** vom **Zähler** in den **Nenner**, oder umgekehrt, so **ändert** sich das **Vorzeichen** des **Exponenten**. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ *oder* $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$	
	$\frac{x^2}{x^{-3}} = x^2 \cdot x^3 = x^5$	$\frac{a^2 \cdot b^3 \cdot a^{-1}}{a^{-2} \cdot b^6} = \frac{a^3}{b^3}$

REGEL 6	Eine **Klammer** mit einem **Exponenten** darüber kann aufgelöst werden, indem man **jeden Faktor** mit dem **Exponenten potenziert**. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ *und* $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	
	$(x \cdot y)^3 = x^3 y^3$	$(x^2 \cdot y^3)^{-2} = x^{-4} \cdot y^{-6} = \frac{1}{x^4 \cdot y^6}$

REGEL 7	Der **Wurzelexponent n** kann als **Nenner des Exponenten** angeschrieben werden. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	
	$a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$	$(x^{\frac{1}{2}} \cdot y^3)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^2 = \sqrt[3]{x} \cdot y^2$

REGEL 8	Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: $a > 1 \Rightarrow a^x > 1$ $\quad$ $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^x < 1$

REGEL 9	$(-1)^n = 1$ *für* $n \in \mathbb{N}_g$	$(-1)^n = -1$ *für* $n \in \mathbb{N}_u$

Bsp. 4) Vereinfache so weit wie möglich. Schreibe das Ergebnis mit positivem Exponenten.

<u>Bemerkung</u>: *Zwei Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert!*

a. $(x \cdot x)^3 \cdot x^{-5} =$	**b.** $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-2} : \left(\frac{a}{b^{-2}}\right)^2 =$
c. $a \cdot (a^{-2})^2 \cdot a =$	**d.** $\frac{2e^5}{e^{-11}} \cdot (6 \cdot e^{24})^2 =$
e. $(b \cdot b^2)^{-4} \cdot (b^{-3})^{-2} =$	**f.** $\left(\frac{f^3}{g^{-7}}\right)^2 : \left(\frac{g^{10}}{f^3}\right)^3 =$
g. $2a^2 \cdot \left(\frac{a^7 b^{-8}}{c^{-3}}\right)^2 \cdot 2c^5 =$	**h.** $8^{-2}a^3 \cdot z^4 \cdot (4z^{-7})^2 =$

Bsp. 5) Vereinfache die Terme. Rechne mit positiven Exponenten.

a. $\frac{10a^{-5}b^{-4}}{5a^{-3}b^7 \cdot b^{-2}} =$	**b.** $\frac{12b^{-6}c^3}{3b^5c^{-2}} =$
c. $\frac{3a \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot a}{12a^3 \cdot b^3} =$	**d.** $\frac{14c^{-2}d^6}{7d \cdot d^{-2} \cdot d^3} =$

Wurzeln

Video 2/2

Weitere **Rechenregeln** für Wurzeln	
(1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	(2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
(3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$	(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$
(5) $\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	(6) $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$

Bsp. 6) Stelle als Wurzel mit positiven Hochzahlen dar.

a. $x^{\frac{1}{7}} =$	**b.** $3y^{\frac{2}{5}} =$	**c.** $x^{\frac{1}{6}}\cdot x^{\frac{4}{6}} =$	**d.** $c^{-\frac{4}{9}} =$	**e.** $r^{\frac{5}{6}}\cdot r^{-\frac{9}{6}} =$

Bsp. 7) Stelle als Potenz dar.

a. $\sqrt[4]{x^3} =$	**b.** $\frac{1}{\sqrt[5]{x^6}} =$	**c.** $\sqrt[6]{x^{-3}}\cdot\sqrt[6]{x^5} =$	**d.** $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^{-5}}} =$

Ganze Zahlen* - 1_565, AG1.1, 2 aus 5

Es sei *a* eine positive ganze Zahl.
Welche der nachstehenden Ausdrücke ergeben für $a \in \mathbb{Z}^+$ stets eine ganze Zahl?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Ausdrücke an!

a^{-1}	☐
a^2	☐
$a^{\frac{1}{2}}$	☐
$3 \cdot a$	☐
$\frac{a}{2}$	☐

Rationale Exponenten - 1_192, AG1.2, 2 aus 5

Gegeben ist der Term $x^{\frac{5}{3}}$ mit $x > 0$.
Welche der nachstehend angeführten Terme sind zum gegebenen Term $x^{\frac{5}{3}}$ äquivalent?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Terme an!

$\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$	☐
$\sqrt[3]{x^5}$	☐
$x^{-\frac{3}{5}}$	☐
$\sqrt[5]{x^3}$	☐
$x \cdot \sqrt[3]{x^2}$	☐

Potenzen* - 1_121, AG2.1, 2 aus 5

Gegeben ist der Term $(a^4 \cdot b^{-5} \cdot c)^{-3}$.
Kreuzen Sie die beiden Terme an, die zum gegebenen Term äquivalent sind.

$a \cdot b^{-8} \cdot c^{-2}$	☐
$\frac{b^{15}}{a^{12} \cdot c^3}$	☐
$\left(\frac{b^8 \cdot c^2}{a}\right)^{-1}$	☐
$\left(\frac{a^4 \cdot c}{b^5}\right)^{-3}$	☐
$a^{-12} \cdot b^{-8} \cdot c^{-3}$	☐