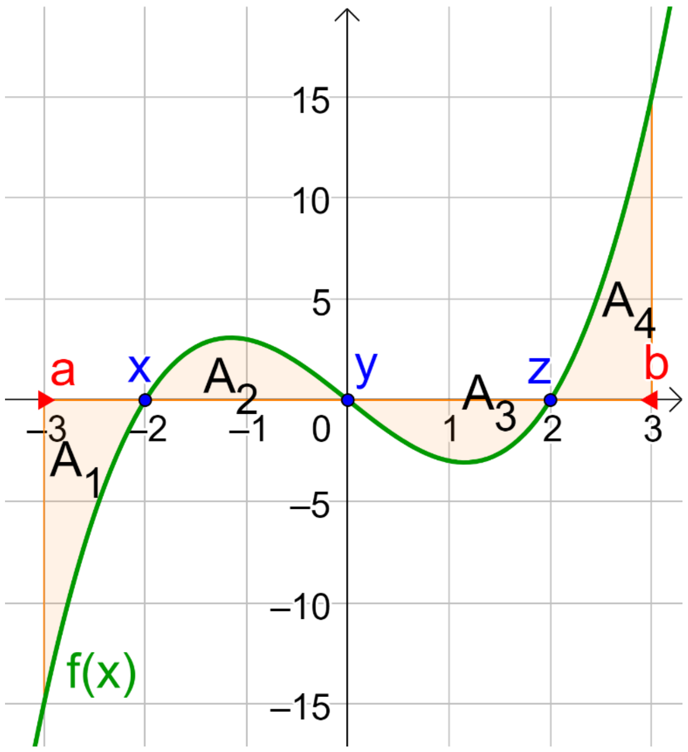
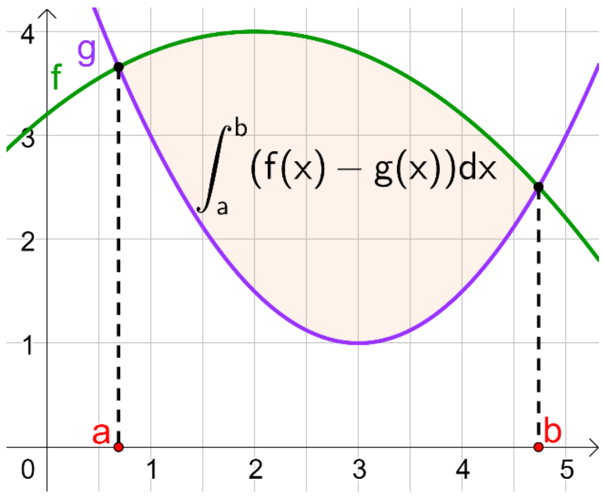
Integralrechnung: Berechnung von Flächeninhalten

SKRIPT (8 Seiten)

Theoretische Erklärungen und Beispielaufgaben zu **folgenden Themenbereichen**:

- **Flächeninhalt zwischen x-Achse und Funktionsgraph**
- **Beispiele mit Parameter**
- **Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen**
- **Flächeninhalt zwischen y-Achse, Funktionsgraph und Tangente**





Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

-> **QR-Codes** im SKRIPT!

Prof. Tegischer

Allgemeine Informationen zum Skript

Im Skript werden die zu erlernenden Inhalte stets durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung.

YouTube-Playlist
(PDF-Datei: KLICKEN!)

SCAN MICH

Die **Musterlösungen** sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/integralrechnung-berechnung-von-flaecheninhalten/

Einsatz des Materials

- Einsatz für **Lehrpersonen** als Aufwertung für den eigenen Unterricht (**Erarbeitung** oder **Festigung** des **Stoffes** anhand des Skriptes, **Einsatz** der **Lernvideos**, „**Flipped Classroom**“, etc.)
- Möglichkeiten für **SchülerInnen**: Selbstständiges Erarbeiten bzw. Festigen eines Stoffgebietes mit dem **Skript** (inkl. Videos & Musterlösungen).
- & noch viele weitere Möglichkeiten!! 😊

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. Alle **Aufgaben** wurden von mir erstellt.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt.
- Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

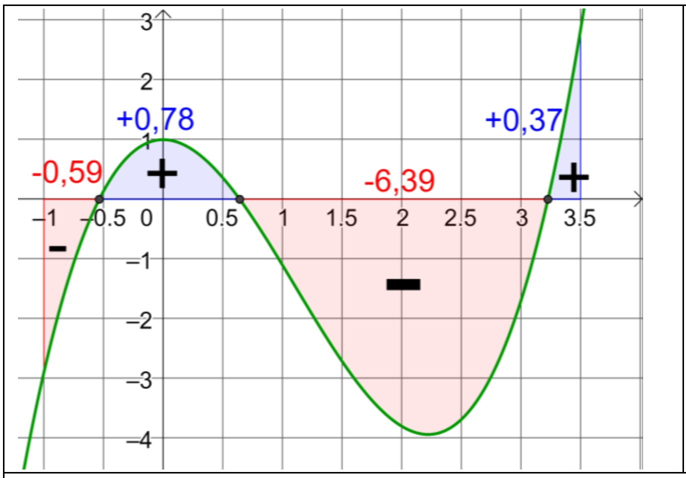
Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

Berechnung von Flächeninhalten

Video 1

(1) Flächeninhalt zwischen x-Achse und Funktionsgraph



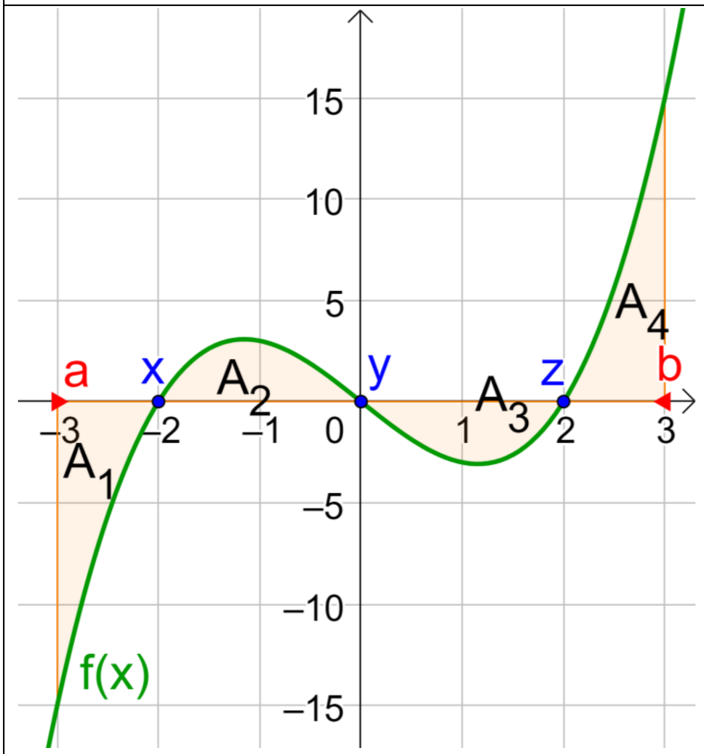
(1) Bestimmtes Integral:

$$\int_{-1}^{3,5} f(x)\,dx = \color{red}{\mathbf{-0,59}} \color{black}{+} \color{blue}{\mathbf{0,78}} \color{red}{\mathbf{-6,39}} \color{black}{+} \color{blue}{\mathbf{0,37}} \color{black}{= -5,83}$$

(2) Flächeninhalt zwischen x-Achse und Funktionsgraph:

$$A = 0{,}59 + 0{,}78 + 6{,}39 + 0{,}37 = 8{,}13\ E^2$$

Besitzt die Funktion ausschließlich **positive Funktionswerte** entspricht das **bestimmte Integral** dem tatsächlichen **Flächeninhalt**.



Besitzt eine Funktion **positive** und **negative Funktionswerte**, so kannst du den Flächeninhalt folgendermaßen berechnen:

Schritt 1: Mache dir eine Skizze des Funktionsgraphen. Gesucht ist der Flächeninhalt im Intervall $[-3; 3]$ zwischen der x-Achse und dem Funktionsgraphen. Berechne alle Nullstellen und überlege dir die Intervalle, in denen die Funktion im positiven bzw. negativen Bereich liegt.

$$f(x) = x^3 - 4x$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \quad x = -2; y = 0; z = 3$$

Es entstehen 4 Bereiche:

$[-3; -2]$: negativ

$[-2; 0]$: positiv

$[0; 2]$: negativ

$[2; 3]$: positiv

Schritt 2: Es müssen alle Bereiche separat betrachtet werden. Die negativen Bereiche müssen zur Berechnung des Flächeninhalts positiv gemacht werden, sodass schlussendlich alle Flächen summiert werden.

2 Optionen, um negative Bereiche positiv zu machen:

(1) Betragsstriche bei den negativen Bereichen:

$$A(a;b) = \left|\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx\right| + \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \left|\int_{0}^{2} f(x)\,dx\right| + \int_{2}^{3} f(x)\,dx = 20{,}5\ E^2$$

(2) **Minus** vor einem bestimmten Integral (negativer Funktionsbereich) setzen:

$$A(a;b) = \color{red}{-}\color{black}{\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx + \int_{-2}^{0} f(x)\,dx} \color{red}{-} \color{black}{\int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx = 20{,}5\ E^2}$$

Bsp. 1) Berechne den Inhalt jener Fläche, der vom Graphen von f und der x-Achse im gegebenen Intervall eingeschlossen wird. Mach dir eine Skizze.

a. $f(x) = 3x^2 - 3 \qquad [-2; 3]$	**b.** $f(x) = 2x + 4 \qquad [-6; 2]$
c. $f(x) = x^3 - 9x \qquad [-5; 4]$	**d.** $f(x) = x^4 - 4x^2 \qquad [-1; 3]$
e. $f(x) = e^x - 2 \qquad [-3; 5]$	**f.** $f(x) = \frac{1}{x} - 1 \qquad [0{,}5; 3]$

Bsp. 2) Eine Funktion f ist gegeben. Bestimme den Parameter e so, dass der Graph von f in $[1; e]$ mit $e > 1$ den Flächeninhalt A mit der x-Achse einschließt.

Video 2

SCAN MICH

a. $f(x) = -x + 3$ $A = 10\ E^2$	**b.** $f(x) = -3x^2 + 12$ $A = 37\ E^2$
c. $f(x) = x^3 - 3x^2$ $A = 270\ E^2$	**d.** $f(x) = -4x + 16$ $A = 146\ E^2$

(2) Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen

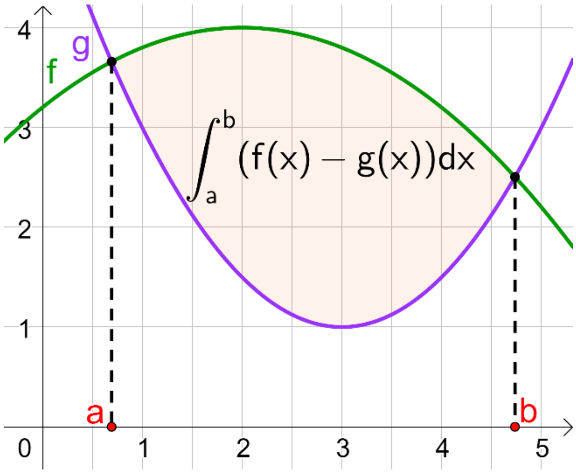
Video 3

Schließen zwei stetige Funktionen im Intervall $[a; b]$ eine Fläche ein, so kann der **Inhalt der eingeschlossenen Fläche** mit folgender Formel berechnet werden:

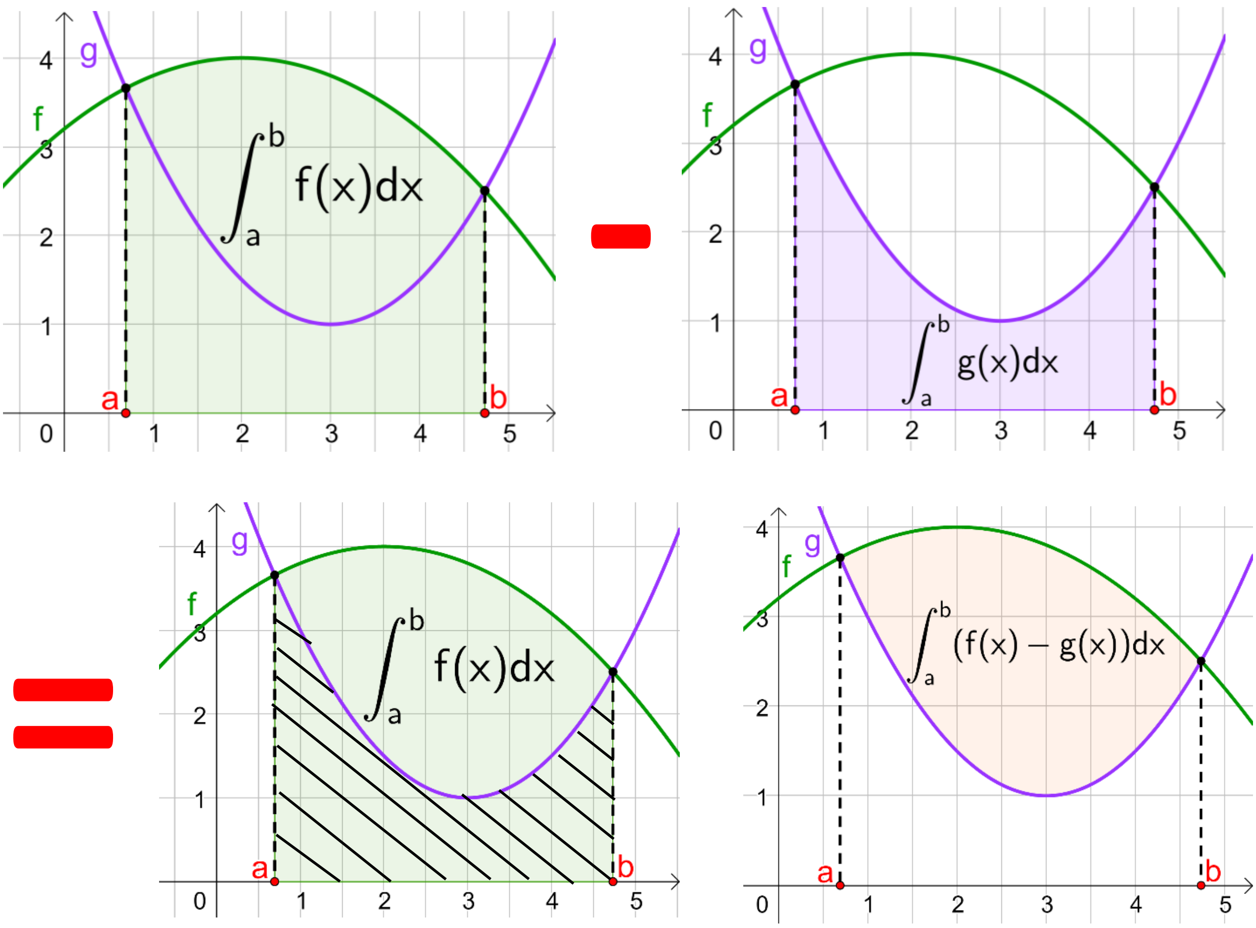
$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

wobei der Graph von $\boldsymbol{f}$ **die obere** und der **Graph von $\boldsymbol{g}$** die **untere Begrenzungskurve** sein muss. Es gilt: $f(x) \geq g(x)$ für alle x aus dem Intervall $[a; b]$.

$$\int_{linke\ Grenze}^{rechte\ Grenze} (\color{green}{obere\ Funktion} - \color{purple}{untere\ Funktion})\,dx$$



Zieht man vom Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ das Integral $\int_a^b g(x)\,dx$ ab, so bleibt nur mehr die eingeschlossene Fläche übrig:



Vorgehensweise:

Schritt 1: Berechne die Stellen, an denen sich die Funktionen schneiden.

$$f(x) = g(x)$$

Schritt 2: Aus wie vielen Teilflächen besteht die gesamte Fläche? Überlege jeweils, welche die „obere“ bzw. „untere“ Funktion ist.

Schritt 3: Berechne die Teilflächen. Die Gesamtfläche bildet sich aus der Summe der Teilflächen.

GeoGebra: **IntegralZwischen(f,g,0,3)**

Musterbeispiel:
Berechne die Fläche, die die Funktionen $f(x) = x + 1$ und $g(x) = x^2 - 2x + 1$ einschließen.

Schritt 1: $f(x) = g(x)$

$$x + 1 = x^2 - 2x + 1 \quad | -x, -1$$
$$0 = x^2 - 3x$$
$$0 = x \cdot (x - 3)$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

Schritt 2: Es existiert eine eingeschlossene Fläche im Intervall [0;3]. Welche ist die obere bzw. untere Funktion?

a. Funktionen zeichnen (Wertetabelle oder GeoGebra)
b. Funktionswert aus dem Intervall (0;3) einsetzen:
$f(1) = 2 \quad g(1) = 1 - 2 + 1 = 0 \quad \boldsymbol{f(1) > g(1)}$

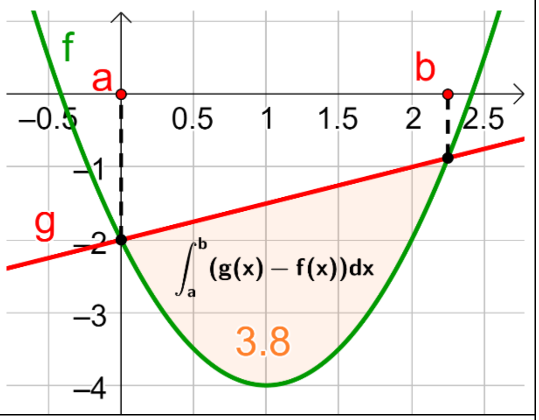
-> Im Intervall [0;3] ist die Funktion $f(x)$ die obere Funktion.

Schritt 3:

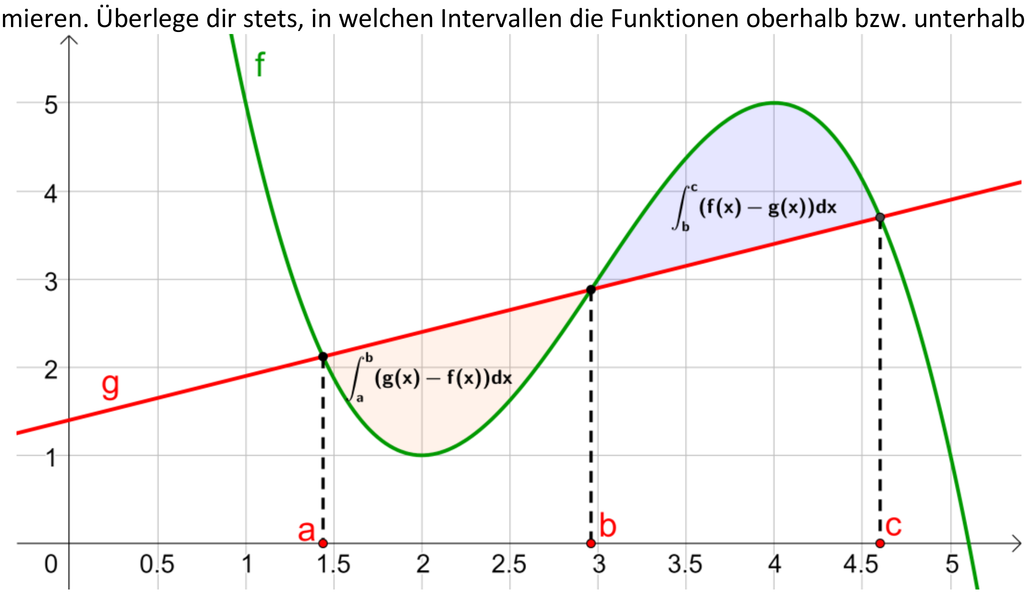
$$\int_0^3 [f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^3 [x + 1 - (x^2 - 2x + 1)]\, dx =$$
$$\int_0^3 [-x^2 + 3x]\, dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c \,\Big|_0^3 =$$
$$-\frac{27}{3} + \frac{27}{2} + c - (0 + 0 + c) = -9 + 13{,}5 = 4{,}5 \text{ E}^2$$

Bemerkung 1:

Bei dieser Berechnung ist es egal, ob die Funktionen unterhalb der x-Achse verlaufen, solange du stets „obere Funktion MINUS untere Funktion“ rechnest.



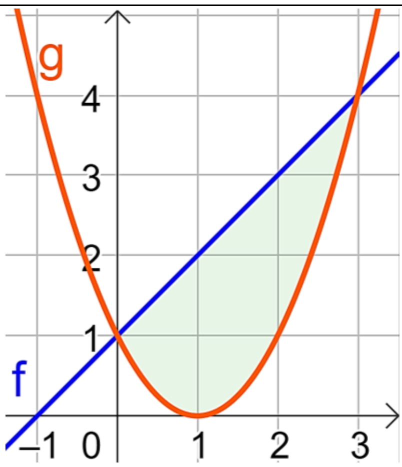
Haben zwei Funktionsgraphen mehrere Teilflächen, so musst du alle Teilflächen einzeln berechnen und anschließend summieren. Überlege dir stets, in welchen Intervallen die Funktionen oberhalb bzw. unterhalb sind.

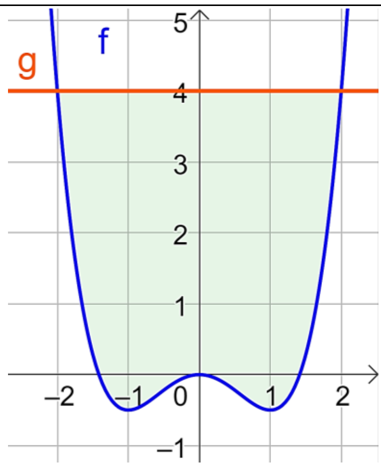


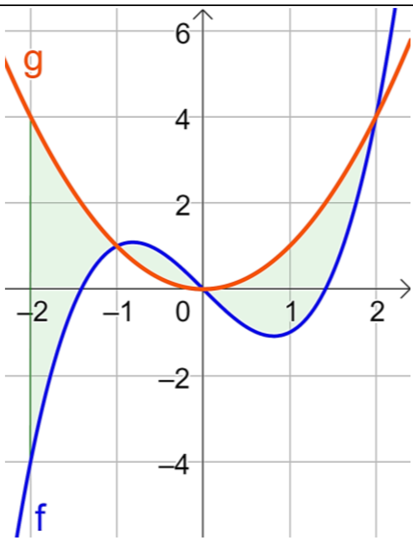
$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]\, dx$$

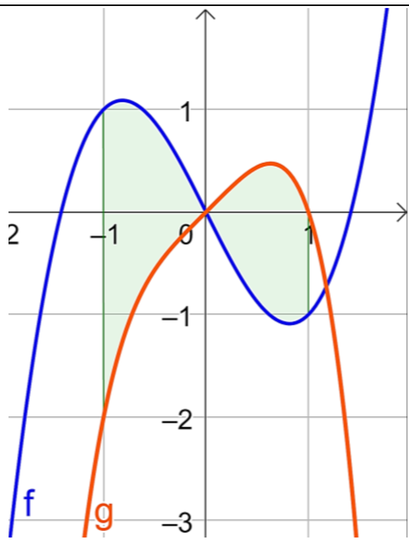
Bsp. 3) Gib mit den Funktionen $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ eine Formel zur Berechnung der markierten Fläche an.

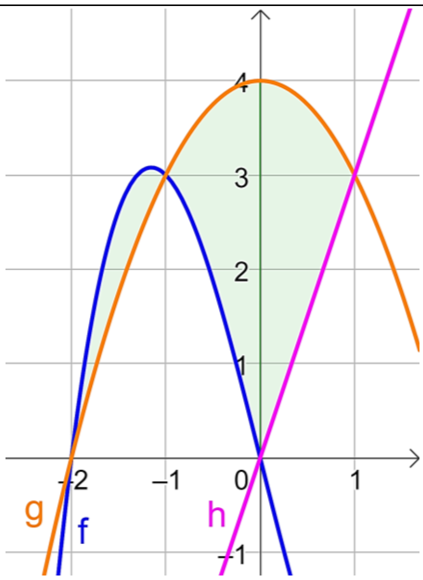
Video 4

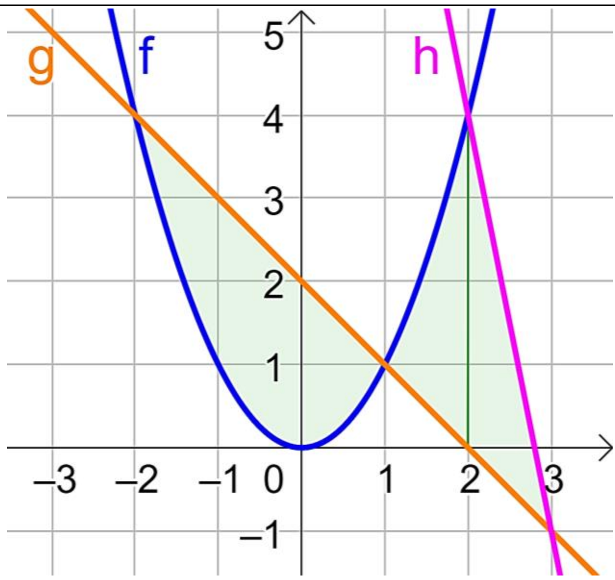












Bsp. 4) Berechne den Flächeninhalt, der von den Graphen der Funktionen f und g begrenzt wird.

a. $f(x) = x\ ,\ g(x) = -x^2 + 2$	**b.** $f(x) = x^2 - 1\ ,\ g(x) = -x^2 + 1$
c. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1\ ,\ g(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3$	**d.** $f(x) = x^2 + 2x - 1\ ,\ g(x) = -x - 1$

Bsp. 5) Berechne den Flächeninhalt, der von den Graphen der Funktionen f und g begrenzt wird.

a. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4\ ,\ g(x) = 2x + 4$	**b.** $f(x) = -x\ ,\ g(x) = x^3 - 2x$
c. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2\ ,\ g(x) = 8 - x$	**d.** $f(x) = x^3 - 4x\ ,\ g(x) = 4 - x^2$

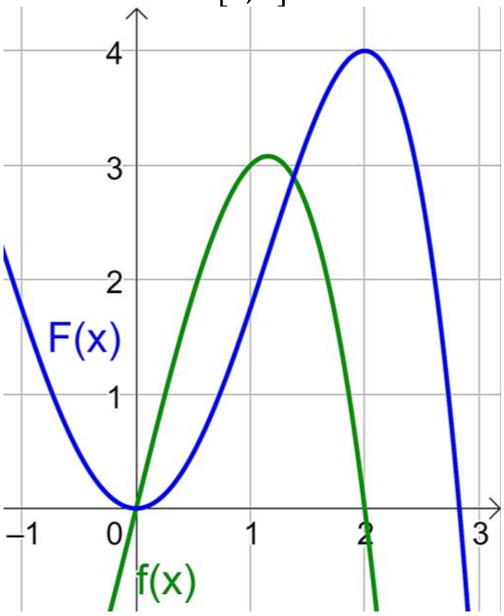
Video 5

Bsp. 6) Berechne den Flächeninhalt, der vom Graphen der Funktion f, ihrer Tangente im angegebenen Punkt P sowie der y-Achse eingeschlossen wird.

a. $f(x) = x^2 - 5x + 2$, $P = (4\|y_P)$	**b.** $f(x) = -x^3 + 4x^2$, $P = (1\|y_P)$
c. $f(x) = x^4 - 2x^2$, $P = (2\|y_P)$	**d.** $f(x) = -x^2 + 4x + 8$, $P = (5\|y_P)$

Bsp. 7) Gegeben sind ein Graph einer Polynomfunktion f und der Graph einer ihrer Stammfunktionen F. Der Graph von f und die positive x-Achse begrenzen im gegebenen Intervall ein endliches Flächenstück. Markiere und ermittle den Flächeninhalt dieses Flächenstücks.

$[0; 2]$



$[0; 4]$