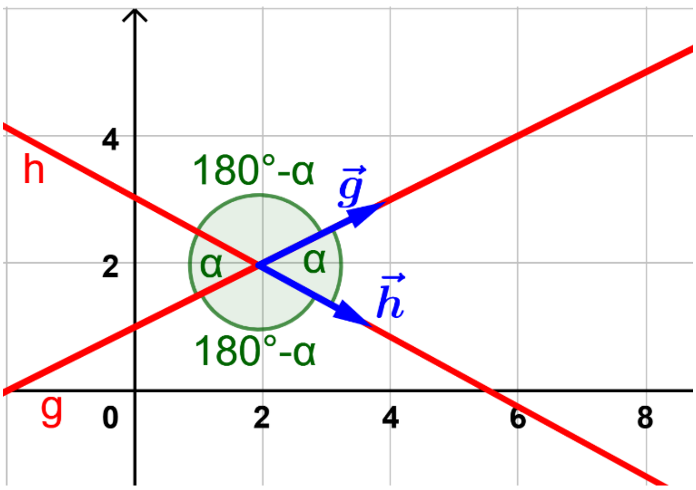
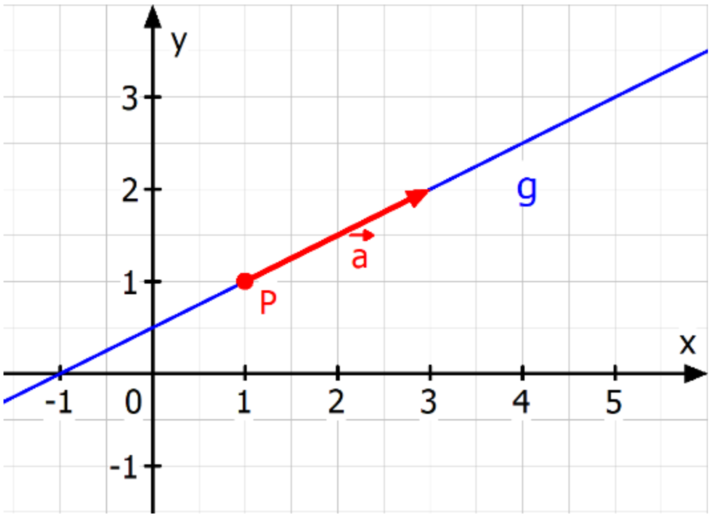
Geraden im $\mathbb{R}^2$

SKRIPT (16 Seiten)

Theoretische Erklärungen und Beispielaufgaben zu **folgenden Themenbereichen**:

- **Parameterdarstellung der Geradengleichung**
- **Normalvektordarstellung der Geradengleichung**
- **Zusammenfassung: Geradengleichungen (inkl. Umrechnungen)**
- **Lagebeziehungen von Geraden**
- **Schnittwinkel von Geraden**
- **Normalabstand einer Geraden zu einem Punkt**





Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

-> **QR-Codes** im SKRIPT!

Prof. Tegischer

Allgemeine Informationen zum Skript

Im Skript werden die zu erlernenden Inhalte stets durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung.

YouTube-Playlist
(PDF-Datei: KLICKEN!)

SCAN MICH

Die **Musterlösungen** sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/14-geraden-im-r%c2%b2/

Einsatz des Materials

- Einsatz für **Lehrpersonen** als Aufwertung für den eigenen Unterricht (**Erarbeitung** oder **Festigung** des **Stoffes** anhand des Skriptes, **Einsatz** der **Lernvideos**, „**Flipped Classroom**“, etc.)
- Möglichkeiten für **SchülerInnen**: Selbstständiges Erarbeiten bzw. Festigen eines Stoffgebietes mit dem **Skript** (inkl. Videos & Musterlösungen).
- & noch viele weitere Möglichkeiten!! 😊

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. Alle **Aufgaben** wurden von mir erstellt.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt.
- Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

Geraden im $\mathbb{R}^2$

Video 1/8

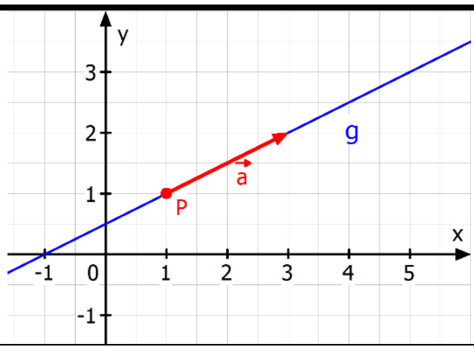
1. Parameterdarstellung der Geradengleichung

Bei der Parameterdarstellung wird die Gerade durch einen **Punkt** und einen **Vektor** festgelegt. Den Vektor nennt man auch **Richtungsvektor** der Gerade (Länge und Orientierung sind in diesem Zusammenhang nicht wichtig.). Auf jeder Geraden liegen unendlich viele Punkte $X = \binom{x}{y}$.

Sei g eine Gerade, P ein Punkt auf dieser Geraden und $\vec{a}$ ein Richtungsvektor von g.

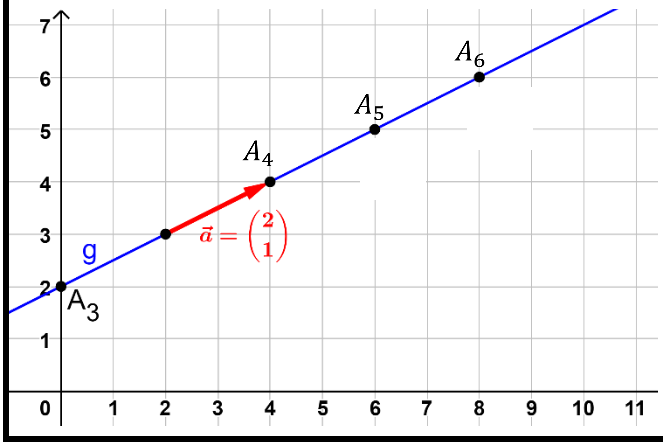
Dann gilt für alle Punkte $X \in g$:

$$\boldsymbol{X = P + t \cdot \vec{a}} \quad mit\ t \in \mathbb{R}.$$



Parameterdarstellung: **Punkt** UND **Richtungsvektor**

Für jede reelle Zahl des Parameters t erhält man einen Punkt auf der Geraden g. Umgekehrt entspricht jeder Punkt auf der Geraden g einem eindeutig bestimmten Wert des Parameters t. (=**PARAMETER**darstellung)



$$A_3 = P - 1 \cdot \vec{a} \ \ (t = -1)$$

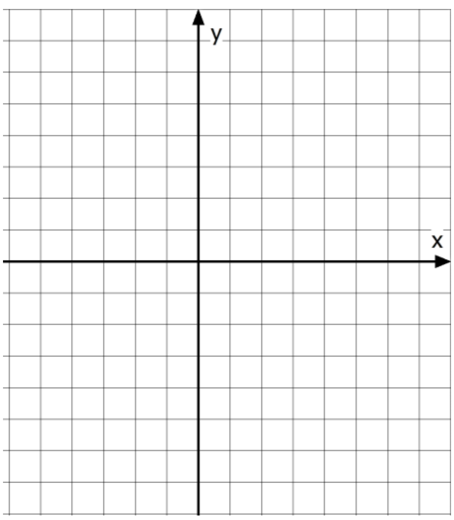
$$A_4 = P + 1 \cdot \vec{a} \ \ (t = 1)$$

$$A_5 = P + 2 \cdot \vec{a} \ \ (t = 2)$$

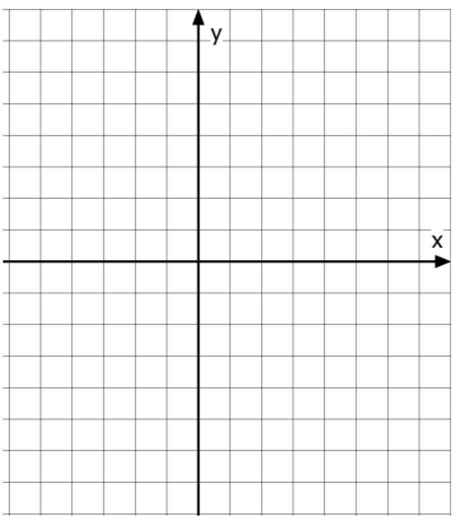
$$A_6 = P + 3 \cdot \vec{a} \ \ (t = 3)$$

Bsp. 1) Gegeben ist ein Punkt P und ein Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden g. Gib eine Parameterdarstellung der Geraden an und zeichne die Gerade in das Koordinatensystem. Skaliere die Achsen passend.

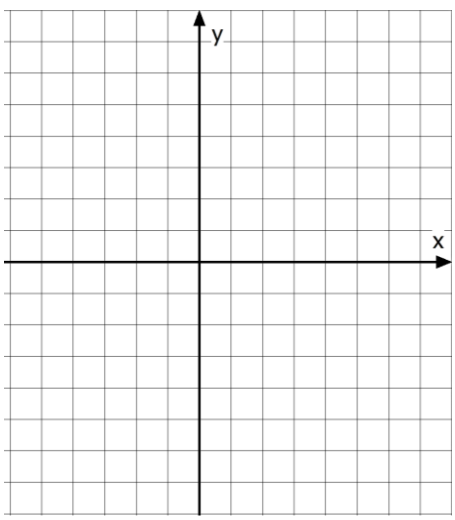
a. $P = (3|4), \vec{a} = \binom{-2}{-2}$



b. $P = (2|100), \vec{a} = \binom{1}{-50}$



c. $P = (100|-100), \vec{a} = \binom{-50}{50}$



Bemerkung: Die Parameterdarstellung einer Geraden ist **NICHT** eindeutig, da der Richtungsvektor $\vec{a}$ grundsätzlich **beliebig gewählt** werden darf, sofern der **gewählte Vektor** zum **Richtungsvektor parallel** ist. Es sind **alle möglichen Vielfache** des Richtungsvektors erlaubt. Die Gerade $g: X = \binom{-2}{-2} + t \cdot \binom{1}{-2}$ kann somit auch mit folgenden Parameterdarstellungen bestimmt werden:

$$g_1: X = \binom{-2}{-2} + t \cdot \binom{2}{-4} \qquad da \binom{2}{-4} parallel\ zu \binom{1}{-2}\ ist$$

$$g_2: X = \binom{-2}{-2} + t \cdot \binom{-0{,}1}{0{,}2} \qquad da \binom{-0{,}1}{0{,}2} parallel\ zu \binom{1}{-2}\ ist$$

$$g_3: X = \binom{-2}{-2} + t \cdot \binom{100}{-200} \qquad da \binom{100}{-200} parallel\ zu \binom{1}{-2}\ ist$$

Bsp. 2) Vereinfache die Darstellung der Geraden g so, dass die Komponenten des Richtungsvektors ganzzahlig und so klein wie möglich sind.

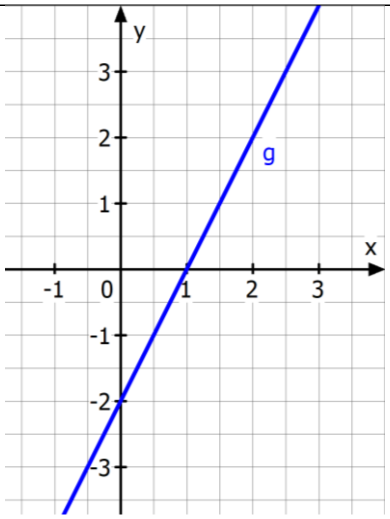
a. $g: X = \binom{-2}{-2} + t \cdot \binom{-0{,}2}{-0{,}1}$	**b.** $g: X = \binom{0}{1} + t \cdot \binom{-0{,}125}{0{,}375}$	**c.** $g: X = \binom{2{,}1}{0{,}7} + t \cdot \binom{200}{-300}$

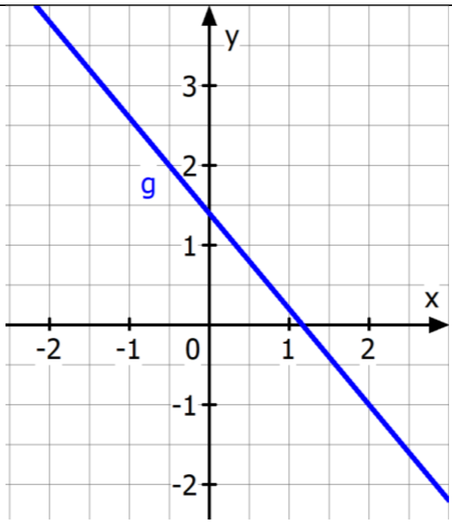
Bsp. 3) Gegeben ist eine Parameterdarstellung einer Geraden. Berechne für die gegebenen Werte von t die Punkte auf dieser Geraden.

a. $g: X = \binom{-2}{-2} + t \cdot \binom{-2}{-1}$ $t = -3; 0; 2; 10$	**b.** $g: X = \binom{0}{1} + t \cdot \binom{-5}{-5}$ $t = -10; 1; 5; 20$	**c.** $g: X = \binom{2{,}1}{0{,}7} + t \cdot \binom{0{,}1}{-0{,}2}$ $t = -1; 1; 3; 4$

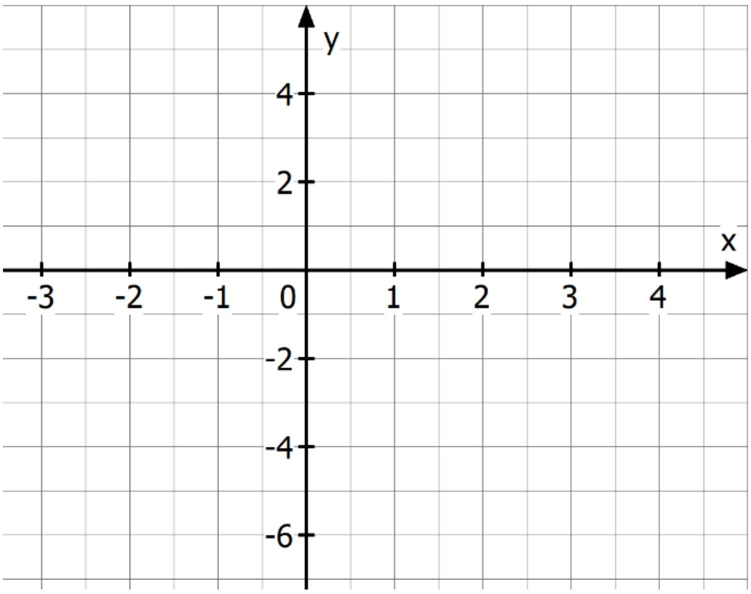
Bsp. 4) Gegeben sind zwei Punkte $A = (-3|5)$ und $B = (2|3)$ einer Geraden. Gib vier verschiedene Parameterdarstellungen dieser Gerade an.

Bsp. 5) Gib **zwei verschiedene Parameterdarstellungen** der dargestellten Geraden g an.





Bsp. 6) Gegeben ist das Dreieck $A(-2|-3), B = (4|-5), C = (3|4)$. Skizziere das Dreieck in das Koordinatensystem. Gib eine Parameterdarstellung der gesuchten Geraden an.



a. Trägergerade der Seite c	**b.** Streckensymmetrale auf a
c. Höhengerade auf b	**d.** Trägergerade der Schwerlinie auf c

Bsp. 7) Bestimme die fehlende Koordinate des Punktes P so, dass er auf der Geraden g liegt.

a. $g: X = \binom{0}{1} + t \cdot \binom{-5}{3} \; - \; P = (\boldsymbol{x}\vert 7)$	**b.** $g: X = \binom{-3}{6} + t \cdot \binom{-2}{-1} \; - \; P = (1\vert y)$

Bsp. 8) Überprüfe, ob die Punkte auf der Geraden g liegen.

a. $g: X = \binom{2}{1} + t \cdot \binom{-2}{3} \; - \; P_1 = (-4\vert 7),\; P_2 = (8\vert -6)$	**b.** $g: X = \binom{-3}{-4} + t \cdot \binom{-2}{3} \; - \; P_1 = (-5\vert -1), P_2 = (3\vert 5)$

Bsp. 9) Überprüfe durch Rechnung, ob die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

a. $A = (1\vert 2),\; B = (4\vert 8),\; C = (6\vert 12)$	**b.** $A = (-1\vert 3), B = (1\vert 1), C = (3\vert -2)$

Bsp. 10) Gib jeweils eine zu g (1) parallele (2) normale Gerade an, die durch den Punkt P geht.

a. $g: X = \binom{-7}{1} + t \cdot \binom{-2}{6}$ – $P = (7\|5)$	**b.** $g: X = \binom{-3}{5} + t \cdot \binom{-2}{4}$ – $P = (-7\|1)$

Bsp. 11) Gib zwei verschiedene Parameterdarstellungen an, die auf die Gerade g normal stehen.

a. $g: X = \binom{7}{3} + t \cdot \binom{-8}{1}$	**b.** $g: X = \binom{4}{5} + t \cdot \binom{-3}{-6}$

Video 2/8

2. Normalvektordarstellung der Geradengleichung

Sei $\vec{n}$ ein Normalvektor und P ein beliebiger Punkt der Geraden g, dann gilt für alle Punkte $X \in g$:

$$g: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$$

Bemerkung: Die Normalvektordarstellung kann in Koordinatenform angeschrieben werden:

$$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$$

$$\binom{n_1}{n_2} \cdot \binom{x}{y} = \binom{n_1}{n_2} \cdot \binom{p_1}{p_2}$$

$$n_1 x + n_2 y = n_1 p_1 + n_2 p_2$$

Allgemeine Geradengleichung
$\boldsymbol{ax + by = c}$

Normalvektorform: **Punkt** UND **Normalvektor**

Beweis:

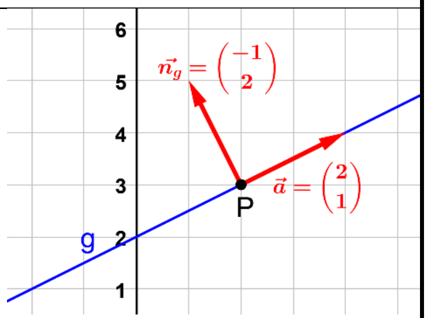
Multipliziere die Parameterdarstellung mit dem zugehörigen Normalvektor ein:

$$X = P + t \cdot \vec{a} \quad | \cdot \vec{n}$$

$$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P + t \cdot \boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{n}}$$

Bemerkung: Das skalare Produkt von $\vec{a} \cdot \vec{n}$ ist 0, da diese beiden Vektoren normal aufeinander stehen!!!

$$\rightarrow \quad \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$$



Die **allgemeine Form** der Geradengleichung $\boldsymbol{ax + by = c}$ erhält man durch **Anwenden** des **Skalarprodukts** der **Normalvektorform**.

Beispiel: Die Gerade $g: X = \binom{-3}{5} + t \cdot \binom{-2}{4}$ ist in der **Parameterform** gegeben. Gib g in der Normalvektorform & in der allgemeinen Form an.

1. Schritt: Bestimmung des Normalvektors zu $\binom{-2}{4}$ -> z.B. $\vec{n} = \binom{4}{2} = \binom{2}{1}$

2. Schritt: Aufstellen der Normalvektorform: $\vec{n} = \binom{2}{1}$ und wir wissen, dass die Gerade durch den Punkt $P = \binom{-3}{5}$ geht.

$$\binom{2}{1} \cdot \binom{x}{y} = \binom{2}{1} \cdot \binom{-3}{5}$$

3. Schritt: Anwendung des Skalarprodukts – Darstellung in der allgemeinen Form:

$$2x + y = -1$$

<u>Vorteil:</u> Ist die Gerade in der **Normalvektorform** bzw. **allgemeinen** Form gegeben, so kann der **Normalvektor** der Geraden **direkt abgelesen** werden!!! 😊

$$g: -3x + 7y = 6 \quad \rightarrow \quad \vec{n} = \binom{-3}{7}$$

Bsp. 12) Eine Gerade g ist in der Parameterdarstellung gegeben. Bestimme eine Gleichung von g in der **Normalvektorform** und in der **allgemeinen Form**.

a. $g: X = \binom{2}{1} + t \cdot \binom{-2}{4}$	**b.** $g: X = \binom{-1}{-4} + t \cdot \binom{3}{-3}$

Bsp. 13) Eine Gerade g ist durch zwei Punkte gegeben. Bestimme eine Gleichung von g in der **Normalvektorform** und in der **allgemeinen Form**.

a. $A = (-2\|1), B = (3\|7)$	**b.** $A = (4\|2), B = (-2\|-5)$

Bsp. 14) Eine Gerade h geht durch den Punkt H und steht normal auf die Gerade g. Bestimme für die Gerade h die allge**meine Geradengleichung**.

a. $g: X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}, H = (2 \mid -1)$	**b.** $g: X = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, H = (-1 \mid 7)$

Bsp. 15) Bestimme (1) einen Normalvektor, (2) einen Richtungsvektor der gegebenen Geraden g.

a. $g: X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$	**b.** $g: 3x - 5y = 1$

Bsp. 16) Die Gerade g ist in der allgemeinen Form gegeben. Bestimme drei beliebige Punkte auf der Gerade g.

a. $g: 2x + 4y = 10$	**b.** $g: -3x - y = -4$

Bsp. 17) Begründe rechnerisch, ob der Punkt auf der gegebenen Geraden liegt.

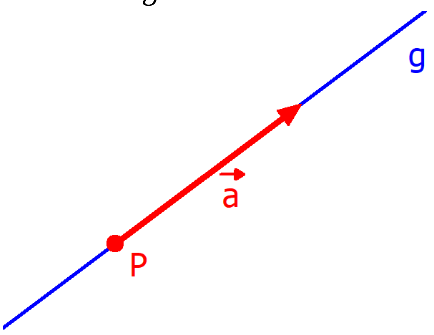
a. $g: 3x - 2y = 10 \quad - \quad P_1 = (2\mid-2), P_2 = (-1\mid-3)$	**b.** $g: -5x + 4y = -1 \quad - \quad P_1 = (1\mid-1), P_2 = (1\mid1)$

3. Zusammenfassung: Geradengleichungen

Video 3/8

Parameterdarstellung

$g: X = P + t \cdot \vec{a}$

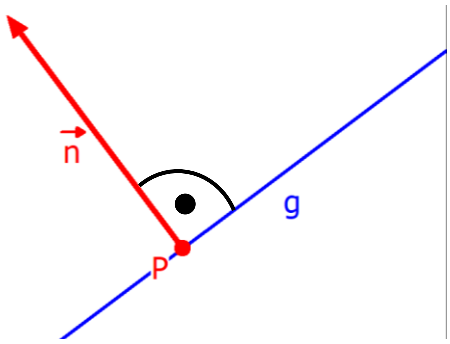


$\vec{n} \perp \vec{a}$

Der **Punkt P** kann übernommen werden.

Normalvektorform

$g: \ \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$



Richtungsvektor von g:

$\vec{a} = \binom{1}{k}$

$g \parallel \binom{1}{k}$

Punkt auf g:

$P = (0|d)$

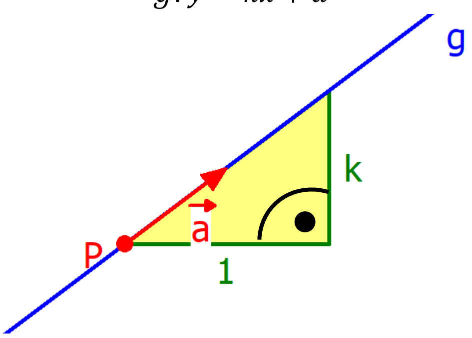
Ausrechnen

Skalarprodukt

$\vec{n} = \binom{a}{b}$

Lineare Funktion (Hauptform)

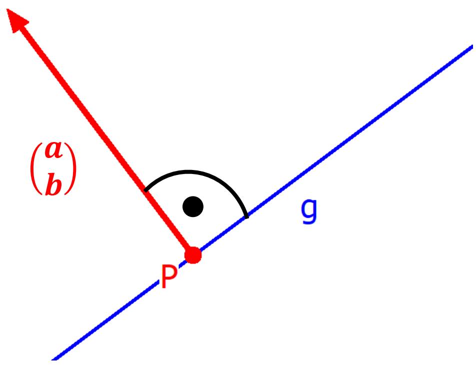
$g: y = kx + d$



UMFORMEN

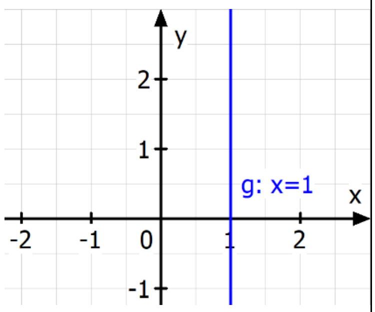
Allgemeine Geradengleichung

$g: ax + by = c$



Bemerkung: Eine **Geradengleichung** der Form $g: x = c$ beschreibt eine **senkrechte Gerade**. Diese kann **nicht** als **lineare Funktion** geschrieben werden!!!

- **Allgemeine Form**: $g: x = 1$
- **Parameterform**: $g: X = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
- **Normalvektorform**: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rightarrow x = 1$



Bsp. 18) Gib die Gerade in der **Parameterdarstellung** an.

a. $g:\ 5x + y = 15$	**b.** $g:\ -2x + 6y = 14$

Bsp. 19) Gib die Gerade in der **Normalvektorform** und **allgemeinen Form** an.

a. $g: X = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$	**b.** $g: X = \begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$

Bsp. 20) Eine Gerade ist in der Form $g: y = kx + d$. Gib die Gerade in der **Parameterform** an.

a. $g:\ y = -2x + 7$	**b.** $g:\ y = 7x + 12$

Bsp. 21) Eine Gerade ist durch die Punkte A und B gegeben. Gib diese Gerade **(1)** in **Parameterdarstellung**, **(2)** in **Normalvektordarstellung, (3)** in **allgemeiner Form** und **(4)** als **lineare Funktion** an.

a. $g\colon\ A = (-7\|9), B = (-5\|5)$	**b.** $g\colon\ A = (3\|1), B = (10\|-6)$

Bsp. 22) Gib die Gleichung der a.) x-Achse, b.) y-Achse in Parameterdarstellung, in Normalvektordarstellung, in allgemeiner Form und (wenn möglich) als lineare Funktion an.

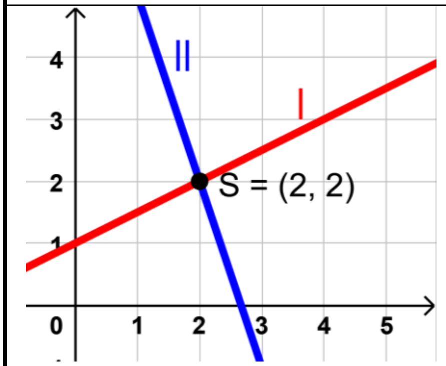
a. $x - Achse$	**b.** $y - Achse$

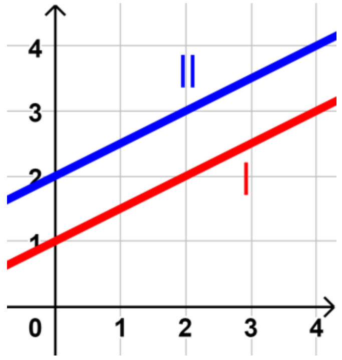
Video 4/8

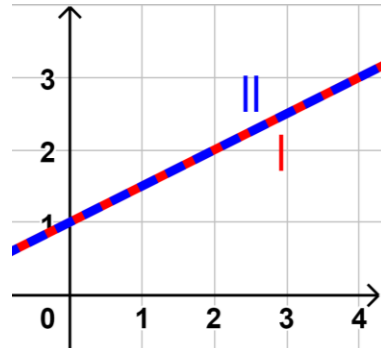
4. Lagebeziehung von Geraden

Zwei Geraden können in $\mathbb{R}^2$ genau einen, keinen oder unendlich viele Punkt(e) gemeinsam haben. Daher ergeben sich folgende Lagebeziehungen:

1. Fall **SCHNEIDEND**	2. Fall **(ECHT) PARALLEL**	3. Fall **IDENTISCH**
Die Geraden sind **schneidend** und haben **genau einen gemeinsamen Schnittpunkt**.	Die Geraden sind **(echt) parallel** und haben **keinen gemeinsamen Punkt**.	Die Geraden sind **identisch** und haben **unendlich viele Punkte gemeinsam**.







4.1 Parameterdarstellung:

Schritt 1: Sind zwei Geraden in **Parameterdarstellung** gegeben, betrachten wir zuerst ihre **Richtungsvektoren**.

- Sind diese parallel zueinander, so sind auch die Geraden parallel zueinander (-> Fall 2/3: **parallel** oder **ident**).
- Sind die Geraden **nicht parallel**, so sind sie schneidend (-> Fall 1: **schneidend**)

PARALLEL bedeutet: Die beiden Richtungsvektoren der beiden Geraden sind Vielfache voneinander!!!

$$g: X = \binom{1}{-6} + t \cdot \binom{2}{-4}$$

$$h: X = \binom{-2}{-5} + s \cdot \binom{1}{3}$$

$\rightarrow g \nparallel h, da \binom{2}{-4}$ *und* $\binom{1}{3}$ keine Vielfache voneinander sind.

Daraus folgt, dass die Geraden sich **gegenseitig schneiden** und es genau einen **Schnittpunkt** gibt.

Schritt 2: Berechnung des **Schnittpunktes**

Setze die Geraden **g** und **h** gleich (SCHNEIDE):

$$g = h$$

$$\binom{1}{-6} + t \cdot \binom{2}{-4} = \binom{-2}{-5} + s \cdot \binom{1}{3}$$

Daraus entstehen ein **Gleichungssystem** mit **zwei Variablen**:

$$\text{I}: \quad 1 + 2t = -2 + s$$

$$\text{II}: -6 - 4t = -5 + 3s$$

Dieses Gleichungssystem kann mit den bekannten Verfahren (Additions-, Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren) rechnerisch gelöst werden.

→ daraus folgt: $s = 1, t = -1$

Da der Schnittpunkt auf beiden Geraden liegt, kann man **s in h** oder **t in g** einsetzen und erhält den Schnittpunkt:

In g: $\boldsymbol{S} = \binom{-2}{-5} + 1 \cdot \binom{1}{3} = (\mathbf{-1} | \mathbf{-2})$

$$g: X = \binom{1}{3} + t \cdot \binom{3}{1}$$

$$h: X = \binom{1}{4} + s \cdot \binom{6}{2}$$

$$\rightarrow g \parallel h, da\ 2 \cdot \binom{3}{1} = \binom{6}{2}$$

Daraus folgt, dass die Geraden entweder **parallel** oder **ident** sind.

Schritt 2: Überprüfung: **IDENT** oder **PARALLEL**

Überprüfe, ob der gegebene **Punkt einer Geraden** auch **auf der anderen Geraden liegt**!!

$$g: X = \binom{1}{3} + t \cdot \binom{3}{1}$$

$$h: X = \binom{1}{4} + s \cdot \binom{6}{2}$$

Punkt $\binom{1}{3}$ in Gerade h einsetzen:

$$\binom{1}{3} = \binom{1}{4} + s \cdot \binom{6}{2}$$

Daraus entstehen zwei Gleichungen:

$$1 = 1 + 6s \rightarrow s = 0$$

$$3 = 4 + 2s \rightarrow s = -\frac{1}{2}$$

Die beiden Werte **für s** sind **unterschiedlich** -> somit sind g und h parallel.

$$g: X = \binom{7}{6} + t \cdot \binom{3}{1}$$

$$h: X = \binom{1}{4} + s \cdot \binom{6}{2}$$

Punkt $\binom{7}{6}$ in Gerade h einsetzen:

$$\binom{7}{6} = \binom{1}{4} + s \cdot \binom{6}{2}$$

Daraus entstehen zwei Gleichungen:

$$7 = 1 + 6s \rightarrow s = 1$$

$$6 = 4 + 2s \rightarrow s = 1$$

Die beiden Werte **für s** sind **gleich** -> somit sind g und h ident.

Bemerkung: Ist eine Gerade in der **Normalvektorform** gegeben, so kannst du sie in die **Parameterform** umwandeln bzw. den **Richtungsvektor** der Geraden bestimmen.

Video 5/8

Bsp. 23) Ermittle die **Lagebeziehung** der Geraden.

$g: X = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ $h: X = \begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$	$g: X = \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $h: X = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$
$g: X = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $h: X = \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$	$g: X = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $h: X = \begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-8\\5\end{pmatrix}$

Bsp. 24) Berechne den **Schnittpunkt** der Geraden.

$g: X = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ $h: X = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$	$g: \left[G = (-1\|5), \vec{g} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right]$ $h: \left[H = (2\|6), \vec{h} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right]$

Video 6/8

Bsp. 25) Berechne den Schnittpunkt der Geraden.

$g: X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: 3x - 2y = 3$	$g: X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $h: \ 5x + 3y = 3$

Bsp. 26) Berechne den Schnittpunkt der Geraden.

$g: 2x + 5y = -2$ $\quad h: -4x + 3y = 30$	$g: x - y = -2$ $\quad h: \ x + y = 4$

Bsp. 27) Bestimme die **Lagebeziehung** der Geraden.

$g\colon\ X = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad h\colon\ x - 3y = -10$	$g\colon X = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h\colon\ -x + 6y = 10$

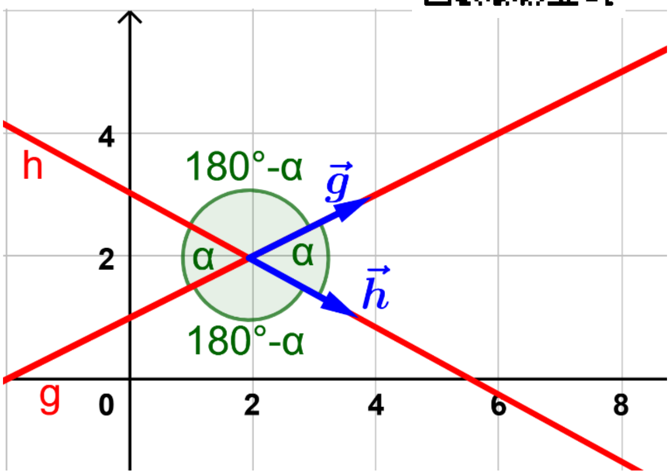
Video 7/8

5. Schnittwinkel von Geraden

Zwei einander schneidende Geraden schließen miteinander vier Winkel ein, wobei jeweils zwei davon gleich sind. In vielen Fällen handelt es sich um einen spitzen und einen stumpfen Winkel. Da der Winkel α eindeutig sein sollte, hat man sich auf folgende Eigenschaft geeinigt:

$$0° \leq \alpha \leq 90°$$

Der Winkel zwischen den beiden Geraden wird mit Hilfe der bekannten Vektor-Winkel-Formel mit den zwei Richtungsvektoren $\vec{g}\ und\ \vec{h}$ der Geraden berechnet:



$$\cos\alpha = \frac{\vec{g} \cdot \vec{h}}{|\vec{g}| \cdot |\vec{h}|}$$

Bsp. 28) Berechne den **Schnittwinkel** der Geraden g und h.

$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h\colon X = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$	$g\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h\colon X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

6. Normalabstand einer Geraden

Video 8/8

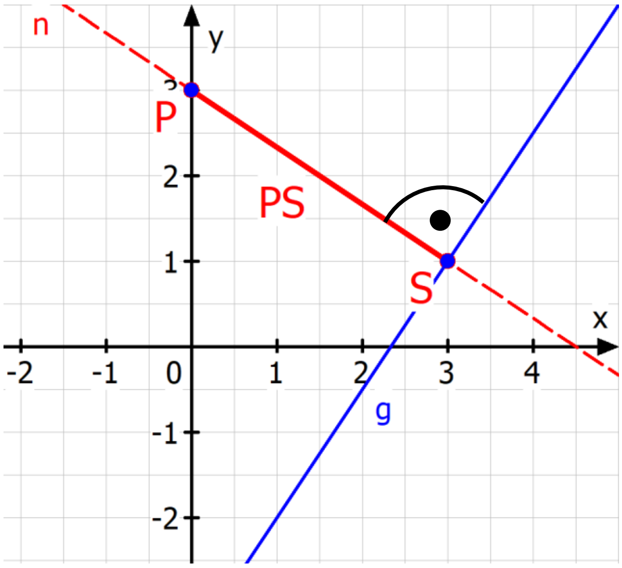
Der Abstand $d(P,g)$ eines Punktes von einer Geraden g ist der **Normalabstand**.
Das ist der kürzest mögliche Abstand des Punktes von der Geraden.

Musterbeispiel: Berechne den Abstand des Punktes $P=(0|3)$ von der Geraden $g: X=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

<u>1. Schritt:</u> Skizze erstellen

Der **Abstand** $d(P,g)$ liegt auf einer **Geraden n**, die **normal** auf **g** steht und **durch P** verläuft. Sie schneidet g in einem **Schnittpunkt S**.

Du erkennst: $d(P,g)=|\overrightarrow{PS}|$



<u>2. Schritt:</u> Erstelle eine **Gerade n**, die normal auf g steht und durch den Punkt P geht.

D.h. der **Richtungsvektor** dieser normalen Geraden **n** entspricht dem **Normalvektor** von der Geraden **g**.

$$\vec{g}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\rightarrow\ \vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}: X=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

<u>3. Schritt:</u> Berechne den **Schnittpunkt S** der beiden Geraden, indem du die beiden **Geraden gleich** setzt.

Löse das entstandene **Gleichungssystem** mit Hilfe eines **Lösungsverfahrens** (Additions-, Gleichsetzungs- und Einsetzungsverfahren).

Geraden **g** und **n gleich setzen**

Additionsverfahren

$$\boldsymbol{g=n}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 1+2t=3s \\ \text{II:} & -2+3t=3-2s \\ \hline \text{I:} & 2t-3s=-1 \quad |\cdot 2 \\ \text{II:} & 3t+2s=5 \quad |\cdot 3 \\ \hline \text{I:} & 4t-6s=-2 \quad |\cdot 2 \\ \text{II:} & 9t+6s=15 \quad |\cdot 3 \\ \hline \end{array}$$

$$13t=13\rightarrow t=1$$

$$\textit{Einsetzen in die 1. Gleichung}: 1+2\cdot 1=3s\rightarrow s=1$$

Einsetzen in Gerade g: Schnittpunkt $S=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=(3|1)$

---> $\boldsymbol{S=(3|1)}$

<u>4. Schritt:</u> Der Normalabstand entspricht nun der Länge (=Betrag) des Vektors vom Punkt S zum Punkt P.

$$d(P,g)=|\overrightarrow{PS}|$$

$$\overrightarrow{PS}=S-P=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

$$d(P,g)=|\overrightarrow{PS}|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}\approx 3{,}61$$

Bsp. 29) Bestimme den Abstand der Geraden G zum Punkt P.

$g: X = \binom{2}{3} + t \cdot \binom{3}{-1}$ $P = (0\|7)$	$g: 2x - 4y = 6$ $P = (3\|5)$