LÖSUNGEN

Ungleichungen

Video 1/8

SCAN MICH

1. Wiederholung Mengenlehre

Eine **Menge** besteht in der Mathematik aus **Elementen**.

- $x \in M$ ... Das Objekt x ist **ein Element** der Menge M
- $x \notin M$ ... Das Objekt x ist **kein Element** der Menge M

Die **leere Menge**, die keine Elemente hat, wird in der Form { } geschrieben.

Beispiele:

- Menge der **natürlichen Zahlen**: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\} \rightarrow Beispiel: x = 2 \rightarrow x \in \mathbb{N}$
- Menge der **ganzen Zahlen**: $\mathbb{Z} = \{\dots\dots -3; -2; -1\ 0; 1; 2; 3 \dots\} \rightarrow Beispiel: x = 1{,}4 \rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

Zahlenmengen

- Menge der **natürlichen Zahlen**: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Menge der **ganzen Zahlen**: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Menge der **rationalen Zahlen**: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

  Alle rationalen Zahlen können als **Bruch** dargestellt werden. Ein Bruch kann immer in eine endliche oder periodische (unendlich lang, aber periodisch) **Dezimalzahl** umgewandelt werden.

- Menge der **irrationalen Zahlen** $\mathbb{I}$: Alle Dezimalzahlen, die unendlich lang **UND** niemals periodisch sind.

  Beispiele: $\sqrt{2}, \pi, \sqrt{7}, \dots$

- Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ (= Alle Dezimalzahlen).

  Die reellen Zahlen ergeben sich aus den rationalen Zahlen (endliche & periodische Dezimalzahlen) UND den irrationalen Zahlen (nicht periodische, unendliche Dezimalzahlen)

Index bei Zahlenmengen

- Menge der **positiven natürlichen Zahlen**: $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ – ohne 0!
- Menge der **geraden ganzen Zahlen**: $\mathbb{Z}_g = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
- Menge der **ungeraden ganzen Zahlen**: $\mathbb{Z}_u = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$
- Menge der **positiven rationalen Zahlen**: $\mathbb{Q}^+$
- Menge der **negativen rationalen Zahlen**: $\mathbb{Q}^-$

Darstellung von Mengen

- **Aufzählende Darstellung** (beliebige Reihenfolge, meist sortiert) z.B. $M = \{1; 3; 5; 7; 9\}$
- **Beschreibende Darstellung** – Elemente werden durch eine gemeinsame Eigenschaft angegeben:

  Bsp.: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 7\}$

  „x ist ein Element aus der Menge der natürlichen Zahlen und ist größer gleich 2 und kleiner gleich 7"

  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 7\} = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

  Beschreibende Darstellung

  Aufzählende Darstellung

- **Intervallschreibweise** – Bei reellen Intervallen kann die Menge mittels Intervallschreibweise dargestellt werden. Eine **eckige Klammer** bedeutet, dass die **Randzahl** in der Menge **enthalten** ist. Eine **offene Klammer** bedeutet, dass die **Randzahl** nicht enthalten ist. Beim Zahlenstrahl wird dies folgendermaßen dargestellt:

  ● ... Zahl gehört zum Intervall (=abgeschlossen)

  ○ ... Zahl gehört NICHT zum Intervall (=offen)

Zur Erinnerung:

- $[3;8] = \{x \in \mathbb{R} |\, 3 \le x \le 8\}$
- $(-2;4] = \{x \in \mathbb{R} |\, -2 < x \le 4\}$

Bsp. 1) Gib die Menge jeweils in aufzählender Darstellung an.

$A = \{x \in \mathbb{N}_u \| 5 \le x < 10\} = \{5;7;9\}$	$B = \{x \in \mathbb{N} \| x \text{ teilt } 30\} = \{1;2;3;5;6;10;15;30\}$
$C = \{x \in \mathbb{N} \| -5 \le x < 2\} = \{0;1\}$	$D = \{x \in \mathbb{Z} \| -5 \le x < 2\} = \{-5;-4;-3;-2;-1;0;1\}$
$E = \{x \in \mathbb{N}_g \| 1 < x \le 9\} = \{2;4;6;8\}$	$F = \{x \in \mathbb{N} \| x^2 = 9\} = \{3\}$

$-3 \notin \mathbb{N}$

Bsp. 2) Gib die Menge jeweils in beschreibender Darstellung an.

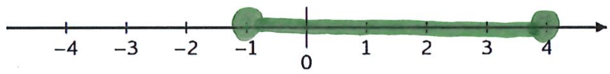
$A = \{3;4;5;6\} = \{x \in \mathbb{N} \| 3 \le x \le 6\}$	$B = \{2;4;6;8\} = \{x \in \mathbb{N}_g \| 2 \le x \le 8\}$
$C = \{-3;-2;-1\} = \{x \in \mathbb{Z} \| -3 \le x \le -1\}$	$D = \{1;2;4;8;16\} = \{x \in \mathbb{N} \| x \text{ teilt } 16\}$

Bsp. 3) Reelle Intervalle: Intervallschreibweise – Mengenschreibweise

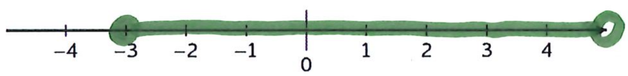
a. $A = \{x \in \mathbb{R} \| 1 \le x \le 3\} = [1;3]$	a. $A = [5;13) = \{x \in \mathbb{R} \| 5 \le x < 13\}$
b. $B = \{x \in \mathbb{R} \| 1 < x \le 4\} = (1;4]$	b. $B = (-3;-2) = \{x \in \mathbb{R} \| -3 < x < -2\}$
c. $C = \{x \in \mathbb{R} \| -2 < x \le -1\} = (-2;-1]$	c. $C = (-12;4] = \{x \in \mathbb{R} \| -12 < x \le 4\}$
d. $D = \{x \in \mathbb{R} \| -11 < x < 13\} = (-11;13)$	d. $D = [3;10] = \{x \in \mathbb{R} \| 3 \le x \le 10\}$
e. $E = \{x \in \mathbb{R} \| x \le 3\} = (-\infty;3]$	e. $E = (-\infty;3] = \{x \in \mathbb{R} \| x \le 3\}$

Bsp. 4) Gib zuerst in Intervallschreibweise / Mengenschreibweise an. Stelle das reelle Intervall am Zahlenstrahl dar.

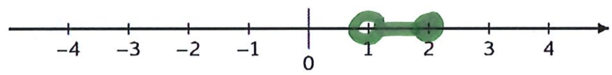
a. $A = \{x \in \mathbb{R} |\, -1 \le x \le 4\} = [-1;4]$



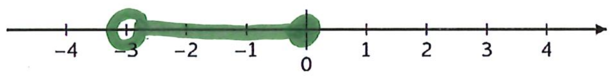
b. $B = [-3;5) = \{x \in \mathbb{R} |\, -3 \le x < 5\}$



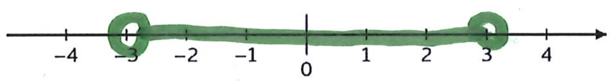
c. $C = \{x \in \mathbb{R} |\, 1 < x \le 2\} = (1;2]$



d. $D = \{x \in \mathbb{R} |\, -3 < x \le 0\} = (-3;0]$



e. $E = (-3;3) = \{x \in \mathbb{R} |\, -3 \le x \le 3\}$



f. $F = \{x \in \mathbb{R} |\, -2 < x < 3\} = (-2;3)$

2. Lineare Ungleichungen

Video 2/8

Unter einer linearen Ungleichung versteht man einen Ausdruck, in dem eines der Ordnungsrelationszeichen $<, \leq, > \textit{ oder } \geq$ vorkommt, z.B.:

- $3x + 6 < 9$ lineare Ungleichung mit **einer Variablen** oder
- $3x + 5y < 8$ lineare Ungleichung in **zwei Variablen**

Wie beim Lösen von linearen Gleichungen werden auch bei Linearen Ungleichungen **dieselben Äquivalenzumformungen** verwendet. Einen Unterschied gibt es jedoch:

Wird mit einem negativen Wert multipliziert bzw. dividiert ($\neq 0$), so dreht sich das Ordnungsrelationszeichen um.

$-4x < 8 \quad \vert : (-4)$	$-x > -5 \quad \vert \cdot (-1)$	$-50x \leq 100 \quad \vert : (-50)$
$x > -2$	$x < 5$	$x \geq -2$

Die Lösung bzw. die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung ist im Regelfall kein einzelner Wert, sondern ein Zahlenbereich, der in Mengen- oder Intervallschreibweise angegeben wird. Auf der Zahlengeraden kann die Lösung graphisch veranschaulicht werden.

WICHTIG: Beachte immer die angegebene Grundmenge!!! Die Grundmenge G legt die Menge jener Zahlen fest, die als mögliche Lösung für die Ungleichung erlaubt ist. Wenn die Lösung der Ungleichung keine Elemente der Grundmenge besitzt, so ist die Lösungsmenge stets die leere Menge $L = \{\,\}$.

- $G = \mathbb{N}$: $x < 5 \rightarrow \quad L = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $G = \mathbb{Z}$: $x < 5 \rightarrow \quad L = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
- $G = \mathbb{R}$: $x < 5 \rightarrow \quad L = (-\infty; 5)$

Ist die **Grundmenge** aus den **natürlichen oder ganzen Zahlen**, so kann die Lösungsmenge im **aufzählenden UND** im **beschreibenden Verfahren** angegeben werden.

Ist die **Grundmenge** aus den **reellen Zahlen**, so kann die Lösungsmenge im **beschreibenden Verfahren** UND in der **Intervallschreibweise** angegeben werden.

a. Lösen linearer Ungleichungen

Beim rechten Beispiel muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden! Bei den Beispielen gilt jeweils $G = \mathbb{Q}$.

$6 \cdot (x-1) + 1 > 3x + 13$ $6x - 6 + 1 > 3x + 13$ $6x - 5 > 3x + 13 \mid -3x, +5$ $3x > 18 \mid : 3$ $x > 6$ $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$ ... **Mengenschreibweise** $L = (6, +\infty)$ ... **Intervallschreibweise**	$5 - x \leq 2 \cdot (4 + x)$ $5 - x \leq 8 + 2x \quad \mid -2x, -5$ $-3x \leq 3 \mid : (-3)$ $x \geq -1$ $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ ... **Mengenschreibweise** $L = [-1, +\infty)$ ... **Intervallschreibweise**

Spezialfälle linearer Ungleichungen

Fall 1: Die Ungleichung ist – für alle möglichen Werte – immer falsch. -> $\boldsymbol{L} = \{\,\}$	$3x + 7 > 3x + 8 \mid -3x$ $\mathbf{7 > 8}$ **falsche** Aussage -> $L = \{\,\}$
Fall 2: Die Ungleichung ist – für alle möglichen Werte – immer richtig. -> **Lösungsmenge = Grundmenge**	$2x + 1 < 2x + 2 \mid -2x$ $\mathbf{1 < 2}$ **wahre** Aussage -> $L = G$

Bsp. 5) Gib die Lösungsmenge L in Mengenschreibweise (aufzählend und/oder beschreibend) und falls möglich in Intervallschreibweise an.

a. $-4x - 14 < 16 + 2x \quad G = \mathbb{N}$ $\mid -2x$ $-6x - 14 < 16 \mid +14$ $-6x < 30 \mid :(-6)$ $\underline{\underline{x > -5}}$ $L = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ $L = \{x \in \mathbb{N} \mid x > -5\}$	**b.** $3 \cdot (6v + 4) \geq 9 \cdot (2v - 3) \quad G = \mathbb{R}$ $\cancel{18v} + 12 \geq \cancel{18v} - 27$ $12 \geq -27$ ✓ w.A. $L = G = \mathbb{R}$	**c.** $\frac{x+5}{3} > \frac{3x}{4} \quad G = \mathbb{Z}_G$ $\frac{x+5}{3} > \frac{3x}{4} \mid \cdot 12$ $4 \cdot (x+5) > 3 \cdot 3x$ $4x + 20 > 9x \mid -4x$ $20 > 5x \mid :5$ $4 > x$ $\underline{x < 4}$ $L = \{\ldots; -4; -2; 0; 2\}$ $L = \{x \in \mathbb{Z}_g \mid x < 4\}$
d. $23 - (5 - x) < 12 \quad G = \mathbb{R}$ $23 - 5 + x < 12$ $18 + x < 12 \mid -18$ $\underline{x < -6}$ $L = (-\infty; -6)$ $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6\}$	**e.** $-\frac{1}{2} \cdot (x - 6) < 6$ $\mid \cdot (-2)$ $G = \mathbb{Z}$ $x - 6 > -12 \mid +6$ $\underline{x > -6}$ $L = \{-5; -4; -3; -2; \ldots\}$ $L = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -6\}$	**f.** $-14x + 16 < 72$ $\mid -16$ $G = \mathbb{R}$ $-14x < 56 \mid :(-14)$ $\underline{x > -4}$ $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$ $L = (-4; +\infty)$

Bsp. 6) Löse die Ungleichung mit $G = \mathbb{R}$, gib die Lösungsmenge in Mengen- und Intervallschreibweise an und stelle sie graphisch am Zahlenstrahl dar.

a. $(3x+2)\cdot(2x-1) < 6x\cdot(x+1)$

$\cancel{6x^2}+4x-3x-2<\cancel{6x^2}+6x \quad |-6x$

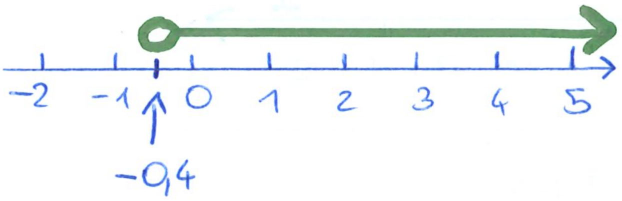
$-5x-2<0 \quad |+2$

$-5x<2 \quad |:(-5)$

$\underline{\underline{x>-\frac{2}{5}}}$

$L=\{x\in\mathbb{R} \mid x>-\frac{2}{5}\}$

$L=(-\frac{2}{5};+\infty)$



b. $(3x+1)^2-3 \geq x\cdot(9x-2)+2x$

$\cancel{9x^2}+6x+1-3\geq\cancel{9x^2}-\cancel{2x}+\cancel{2x}$

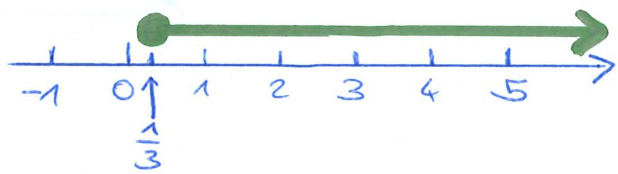
$6x-2\geq 0 \quad |+2$

$6x\geq 2 \quad |:6$

$\underline{\underline{x\geq\frac{1}{3}}}$

$L=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq\frac{1}{3}\}$

$L=[\frac{1}{3};+\infty)$



c. $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-1\leq 1+x \quad |\cdot 12$

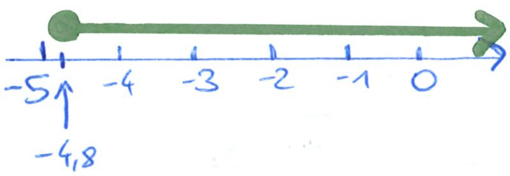
$4x+3x-12\leq 12+12x \quad |+12, -12x$

$-5x\leq 24 \quad |:(-5)$

$\underline{\underline{x\geq -4{,}8}}$

$L=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq -4{,}8\}$

$L=[-4{,}8;+\infty)$



d. $\frac{-8x+10}{4} < \frac{12-4x}{6} \quad |\cdot 12$

$3\cdot(-8x+10)<2\cdot(12-4x)$

$-24x+30<24-8x \quad |+8x, -30$

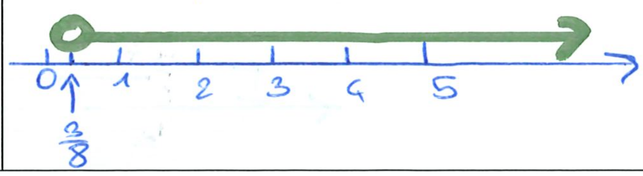
$-16x<-6 \quad |:(-16)$

$x>\frac{6}{16}$

$\underline{\underline{x>\frac{3}{8}}}$

$L=\{x\in\mathbb{R} \mid x>\frac{3}{8}\}$

$L=(\frac{3}{8};+\infty)$



b. Lineare Ungleichungssysteme

Video 3/8

Zwei **lineare Ungleichungen** können zu einem **linearen Ungleichungssystem** zusammengefasst werden. Als **Lösung** kommen **nur Zahlen in Frage**, die beide Ungleichungen erfüllen.

Bsp. 7) Bestimme mit $G = \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des Ungleichungssystems und stelle sie graphisch am Zahlenstrahl dar.

a. $x + 4 > -1 \quad \wedge \quad 4 - 3x \geq 13$

$x+4>-1$

I $\underline{x>-5}$

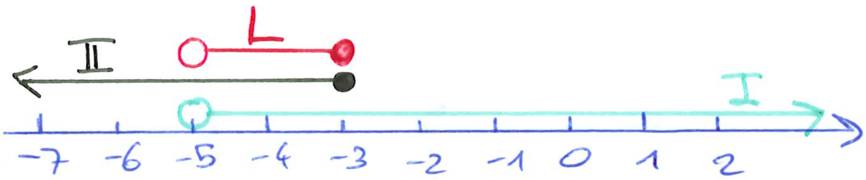
$4-3x \geq 13 \quad |-4$

$-3x \geq 9 \quad |:(-3)$

II $\underline{x \leq -3}$

„UND"

$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x>-5 \wedge x \leq -3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq -3\} = (-5;-3]$



b. $-4x - 2 < -2 \quad \wedge \quad 2x - 4 < -3$

$-4x-2<-2 \quad |+2$

$-4x<0 \quad |:(-4)$

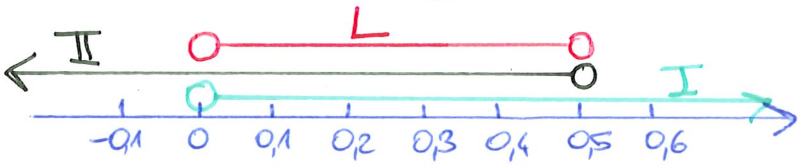
I $\underline{x>0}$

$2x-4<-3 \quad |+4$

$2x<1 \quad |:2$

II $\underline{x<\frac{1}{2}}$

$L = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2}\} = (0;\frac{1}{2})$



c. $3 \cdot (2x - 4) + 10x - 2 < 18 \quad \wedge \quad (-2) \cdot (5x - 4) < 12$

$6x-12+10x-2<18$

$16x-14<18 \quad |+14$

$16x<32 \quad |:16$

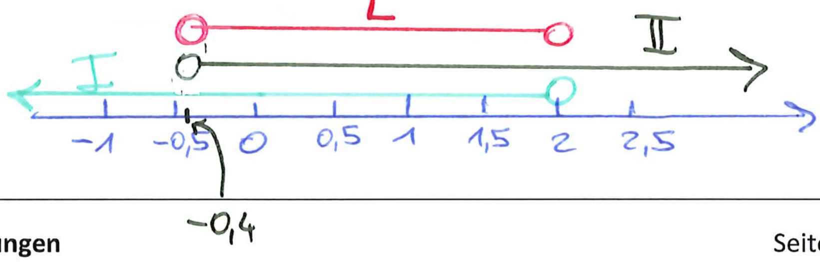
I $\underline{x<2}$

$-10x+8<12 \quad |-8$

$-10x<4 \quad |:(-10)$

II $\underline{\underline{x>-0{,}4}}$

$L = \{x \in \mathbb{R} \mid -0{,}4 < x < 2\} = (-0{,}4;2)$



c. Textungleichungen

Video 4/8

Viele Textaufgaben führen zu Ungleichungen.

1. Wähle eine – der Aufgabenstellung entsprechend – passende Grundmenge.
2. Schreibe die Textungleichung nun mathematisch als Ungleichung an.
3. Löse die Ungleichung.
4. Formuliere eine Antwort.

Bsp. 8) Wähle eine passende Grundmenge. Löse die Textaufgabe. Schreibe eine Antwort.

a. Der Umfang eines Rechtecks ist größer als 36 cm. Die längere Seite ist um 2 cm länger als die kürzere. Wie lang kann die kürzere Rechteckseite sein?	**b.** Prof. Pi besitzt den Lehrer-Handytarif, bei dem er eine Grundgebühr von 5 Euro bezahlen muss. Pro SMS werden aber 5 Cent fällig. Prof. Pi möchte aber maximal 10 Euro pro Monat ausgeben. Wie viele SMS darf er pro Monat verschicken?
$U = 2a + 2b$ $a = b + 2$ $U = 2 \cdot (b+2) + 2b$ $U = 2b + 4 + 2b$ $U = 4b + 4$ $\leadsto 4b + 4 > 36 \quad \vert -4$ $4b > 32 \quad \vert :4$ $b > 8\,cm$ größer als 8cm!	$G = 5€$ pro SMS: $5c = 0{,}05€$ Anzahl SMS $5 + 0{,}05 \cdot x \leq 10 \quad \vert -5$ $0{,}05 \cdot x \leq 5 \quad \vert :0{,}05$ $x \leq 100$ Prof. Pi darf maximal 100 SMS versenden!

Bsp. 9) Welche reellen Zahlen kommen in Frage? Löse mittels einer Ungleichung.

a. Dividiert man eine Zahl durch 8, so erhält man höchstens 11.	**b.** Wenn man von 12 die Hälfte der Zahl subtrahiert, erhält man weniger als 24.
$\frac{x}{8} \leq 11 \quad \vert \cdot 8$ $x \leq 88$ $L = (-\infty; 88]$	$12 - \frac{x}{2} < 24 \quad \vert \cdot 2$ $24 - x < 48 \quad \vert -24$ $-x < 24 \quad \vert \cdot (-1)$ $x > -24$ $L = (-24; +\infty)$

d. Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen

Video 5/8

Musterbeispiel: Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $y + 3 \leq x$ und stelle sie graphisch dar.

Bemerkung: Die Lösungsmenge besteht nun nicht nur aus einzelnen Zahlen, sondern aus **Zahlenpaaren** $(x|y)$.

Für die Ungleichung $y + 3 \leq x$ ist z.B. eine Lösung $(15|1)$, da gilt: $1 + 3 \leq 15 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leq 15 \ \mathit{wahre\ Aussage}$

Die **Lösungsmenge** besteht aus allen **Zahlenpaaren**, die diese Bedingung erfüllen:

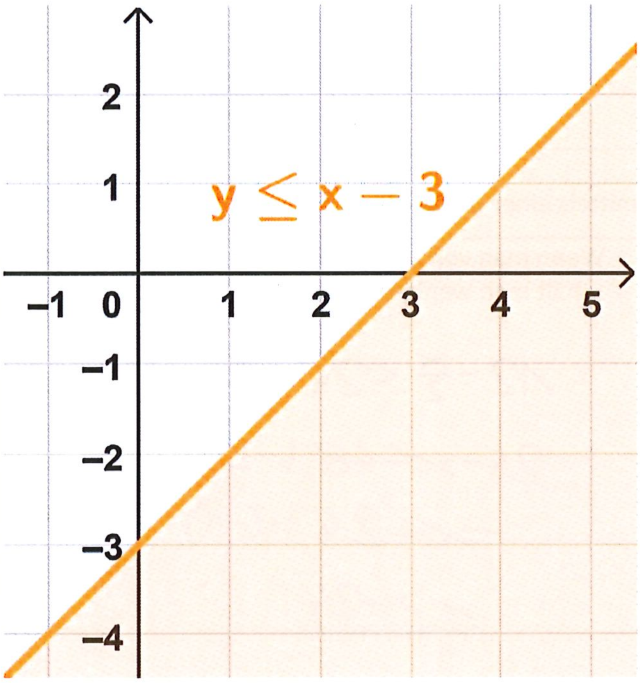
$$L = \{(x|y) \mid y + 3 \leq x \ mit \ x, y \ \in \mathbb{R}\}$$

Vorgangsweise:

1. Forme die Ungleichung nach y um.
2. Zeichne nun die zugehörige Gerade (lineare Funktion) ein, indem du **statt dem Ungleichheitszeichen** ein **Gleichheitszeichen** setzt.
   a. bei $\leq$ $oder$ $\geq$: **durchgezogene** Linie (Punkte auf der Geraden gehören zur Lösungsmenge!!!)
   b. bei $<$ $oder$ $>$: **strichlierte** Linie (Punkte auf der Geraden gehören nicht zur Lösungsmenge!!!)
3. Nun musst du entscheiden, ob die weitere Lösungsmenge unterhalb oder oberhalb der Geraden liegt:
   a. bei $\leq$ $oder$ $<$: **unterhalb** der Gerade!!!
   b. bei $\geq$ $oder$ $>$: **oberhalb** der Gerade!!!

$$y \leq x - 3$$

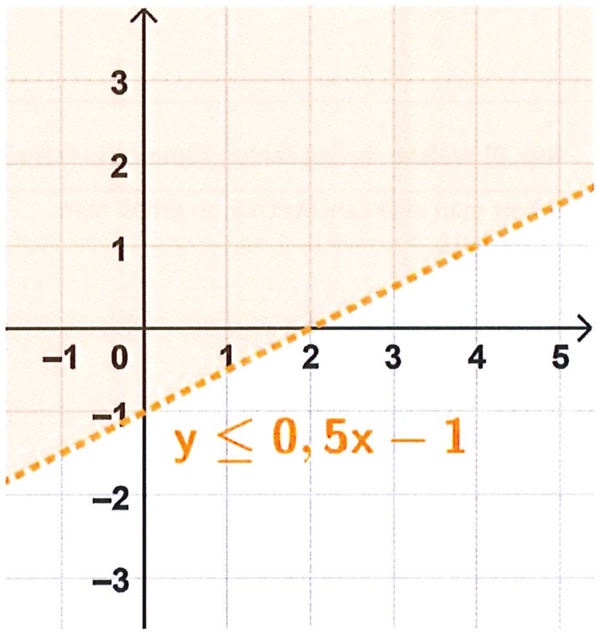
Diese Lösungsenge besteht aus allen Punkten $(x|y)$, die **auf** oder **unter** (wegen dem **kleiner**!!) der Geraden mit $y = x - 3$ liegen. Zum Einzeichnen der Gerade kannst du sie als lineare Funktion $f(x) = x - 3$ deuten.



$$y > 0{,}5x - 1$$

Diese Lösungsenge besteht aus allen Punkten $(x|y)$, die **oberhalb** (wegen dem **größer**!) der Geraden mit $y = 0{,}5x - 1$ liegen.

Bemerkung: Die Punkte auf der Gerade gehören **NICHT** zur Lösungsmenge (→ strichliert zeichnen!)



Bsp. 10) Ermittle die Lösungsmenge der Ungleichung mit $x, y \ \in \mathbb{R}$ und stelle diese graphisch dar.

a. $x - 4y \leq 4$	**b.** $2x - y > -1$
c. $2x + y + 2 \geq 0$	**d.** $x - 3y < 3$

10a) $x - 4y \leq 4$

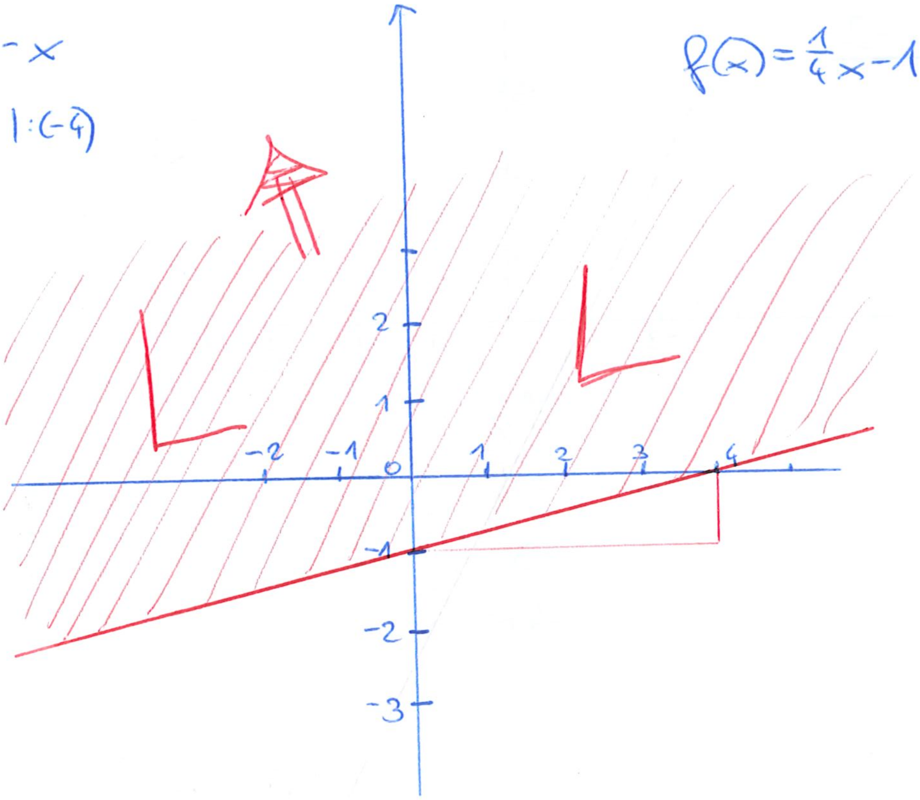
$\Rightarrow L = \{(x|y) \mid x - 4y \leq 4 \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$

$x - 4y \leq 4 \quad | -x$

$-4y \leq -x + 4 \quad | :(-4)$

$\underline{\underline{y \geq \frac{x}{4} - 1}}$

$f(x) = \frac{1}{4}x - 1$



10b) $L = \{(x|y) \mid 2x - y > -1 \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$

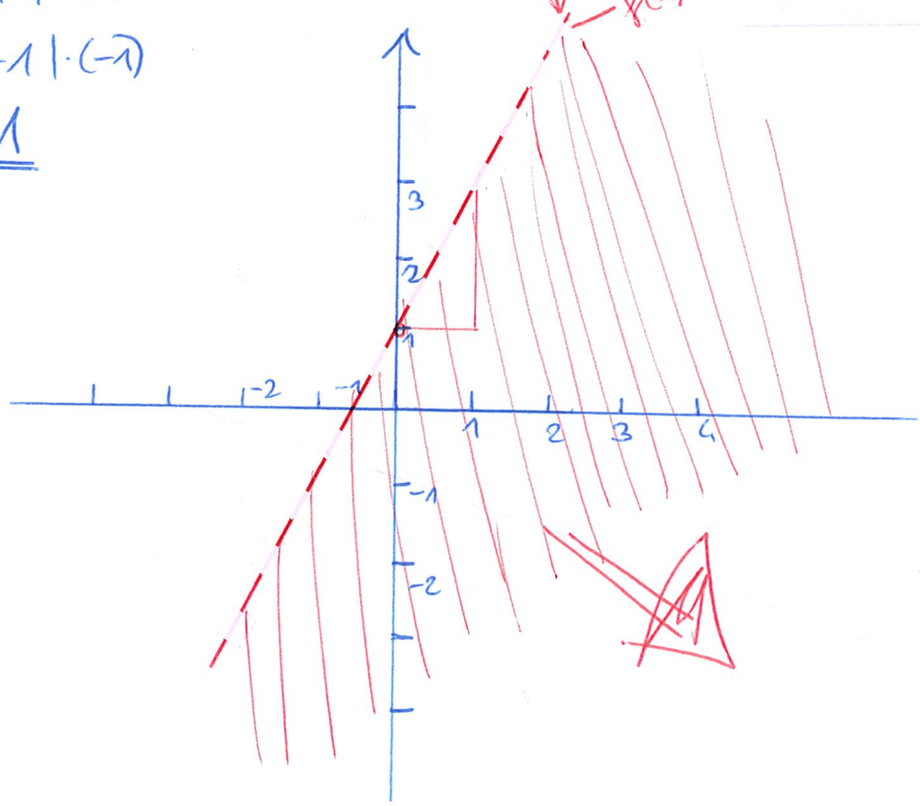
$2x - y > -1 \quad | -2x$

$-y > -2x - 1 \quad | \cdot(-1)$

$\underline{\underline{y < 2x + 1}}$

strichliert wegen < !

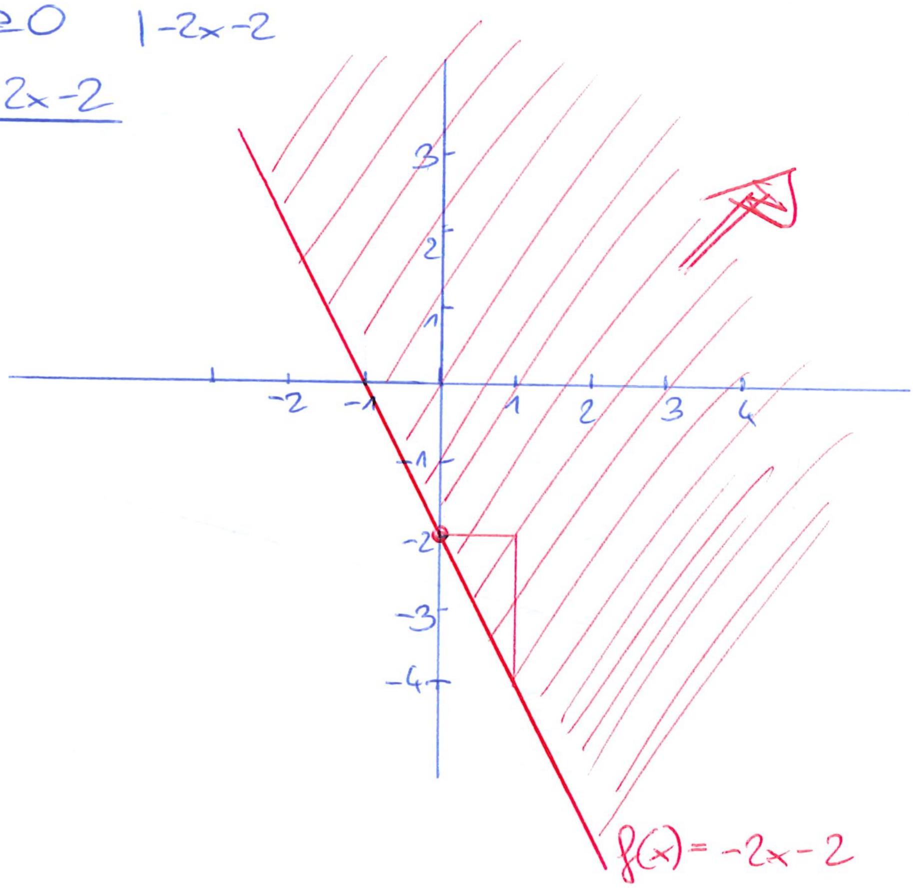
$f(x) = 2x + 1$



10c) $L = \{(x|y) \mid 2x+y+2 \geq 0\}$

$2x+y+2 \geq 0 \quad | -2x-2$

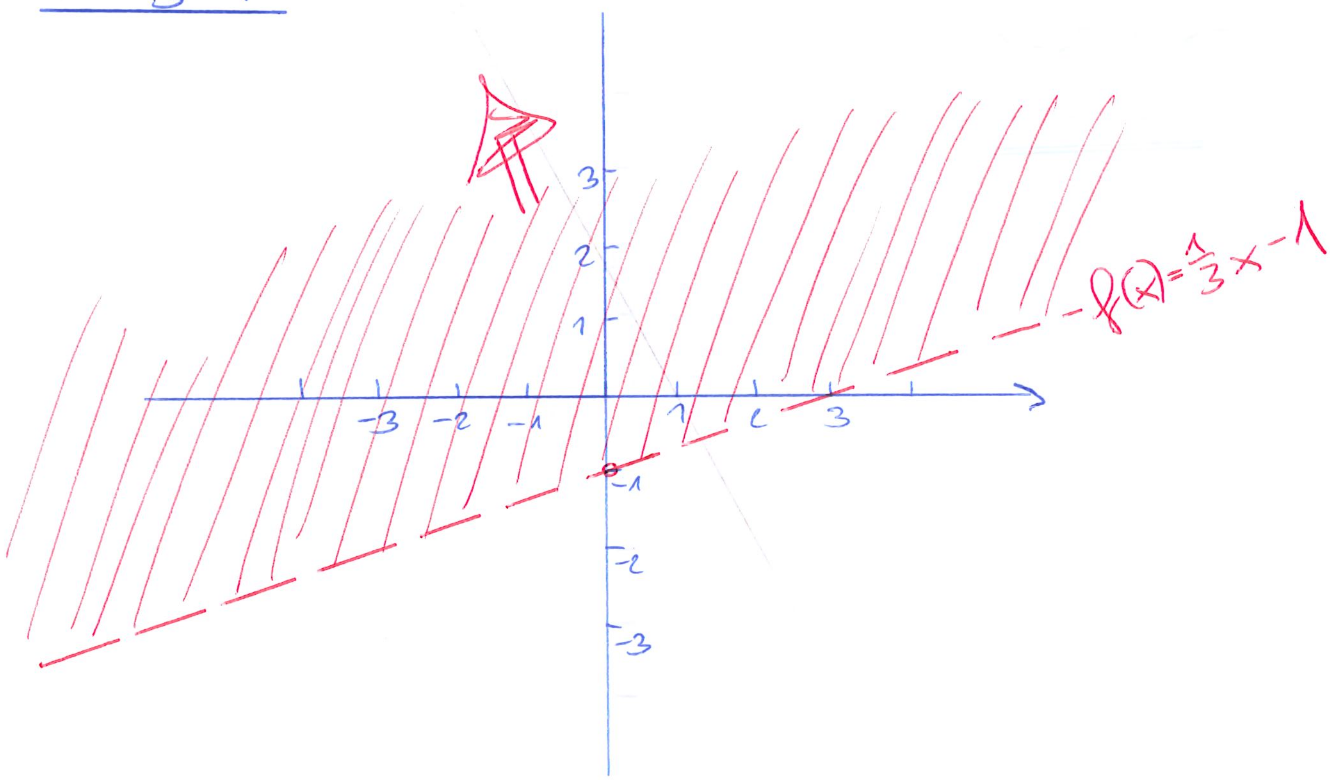
$\underline{y \geq -2x-2}$



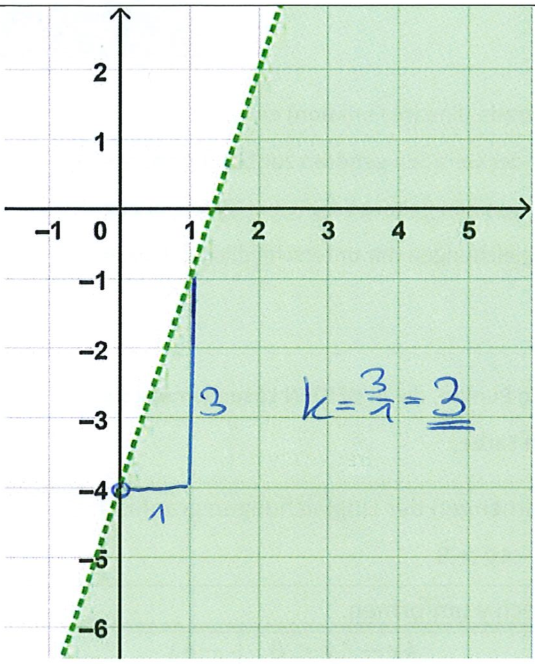
10d) $x - 3y < 3 \quad | -x$

$-3y < -x + 3 \quad | :(-3)$

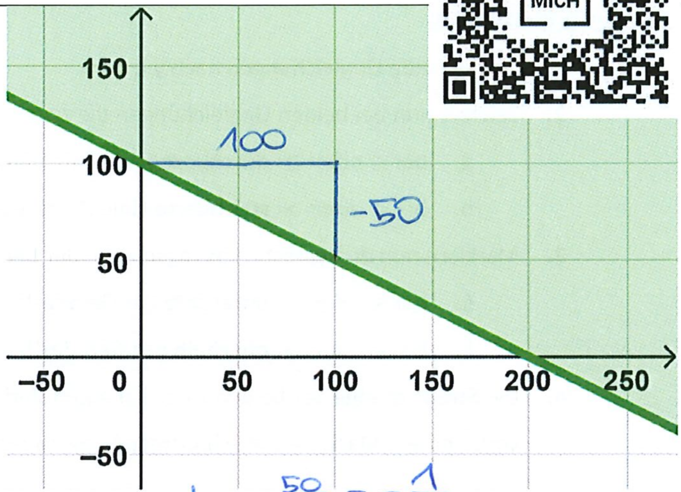
$\underline{y > \frac{x}{3} - 1}$



Bsp. 11) Ermittle die lineare Ungleichung in einer Variablen. Video 6/8

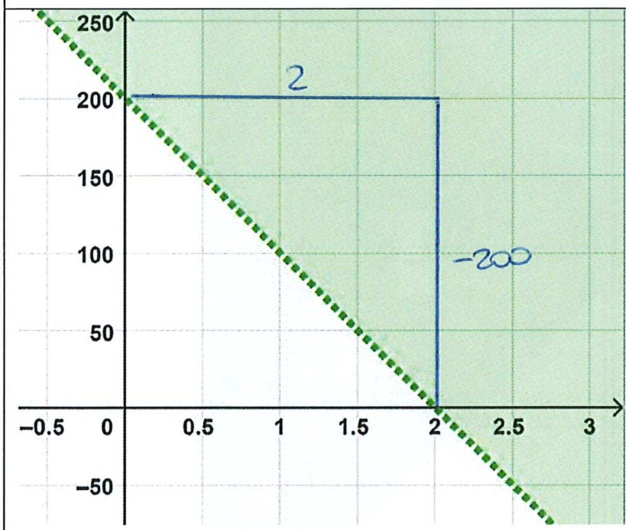


$y < 3x - 4$



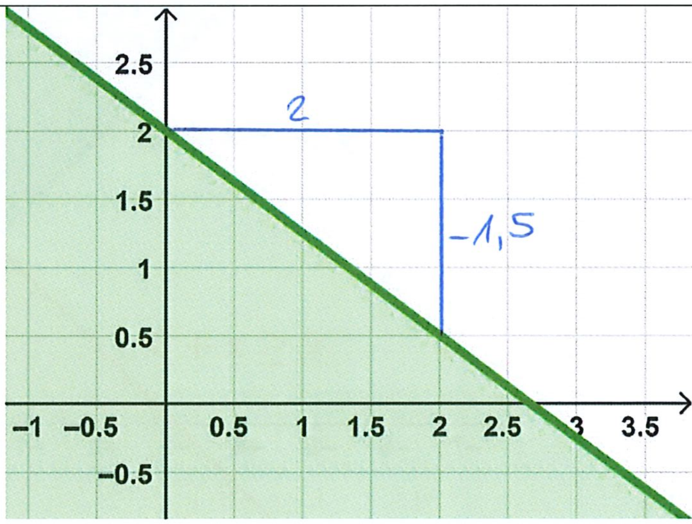
$k = -\frac{50}{100} = -\frac{1}{2}$

$y \geq -\frac{1}{2}x + 100$



$k = -\frac{200}{2} = -100$

$y > -100x + 200$



$k = -\frac{1,5}{2} = -0,75$

$y \leq -0,75x + 2$

Video 7/8

e. Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen

Vorgangsweise:

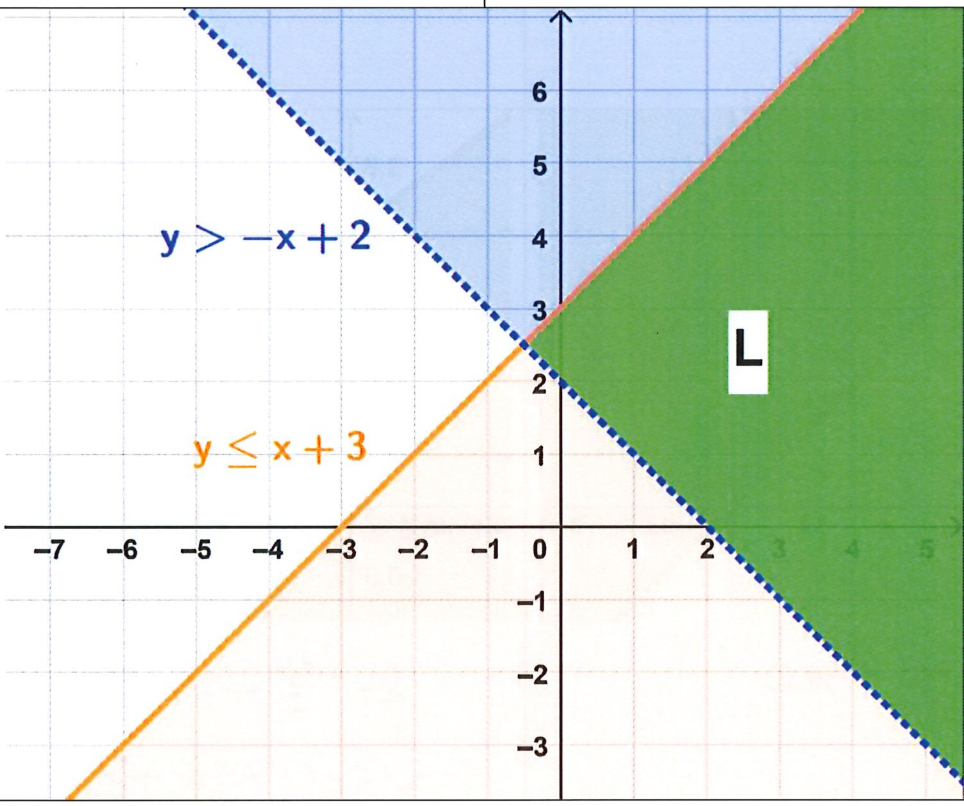
1. Forme beide Ungleichungen nach y um.
2. Zeichne nun bei beiden Ungleichungen die zugehörige Gerade (lineare Funktion) ein:
   a. bei $\leq$ *oder* $\geq$: **durchgezogene** Linie (Punkte auf der Geraden gehören zur Lösungsmenge!!!)
   b. bei $<$ *oder* $>$: **strichlierte** Linie (Punkte auf der Geraden gehören nicht zur Lösungsmenge!!!)
3. Markiere nun die restliche Lösungsmenge der beiden Ungleichungen mit unterschiedlichen Farben:
   a. bei $\leq$ *oder* $<$: **unterhalb** der Gerade!!!
   b. bei $\geq$ *oder* $>$: **oberhalb** der Gerade!!!
4. Die **Schnittmenge** der beiden Ungleichungen sind nun alle Punkte, die in **BEIDEN Lösungsmengen** vorkommen. Markiere die Schnittmenge mit einer dritten Farbe.

Musterbeispiel: Stelle die Schnittmenge der beiden Lösungsmengen der Ungleichungen graphisch dar.

$$-2x \leq 6 - 2y \quad \wedge \quad 4x - 4y > 8$$

Schritt 1: Beide Ungleichungen nach y umformen.

$-2x \leq 6 - 2y \quad \mid +2y, +2x$ $2y \leq 2x + 6 \quad \mid : 2$ $y \leq x + 3$	$4x - 4y < 8 \quad \mid -4x$ $-4y < 4x + 8 \quad \mid : (-4)$ $y > -x - 2$



Bsp. 12) Stelle die Schnittmenge der beiden Lösungsmengen der Ungleichungen graphisch dar.

a. $-3x \leq 5 - y \quad \wedge \quad x - 4y > 0$	**b.** $3x - 4y > 8 \quad \wedge \quad x + 2y < 4$

12a) ① $-3x \le 5 - y \quad | +y$

$y - 3x \le 5 \quad | +3x$

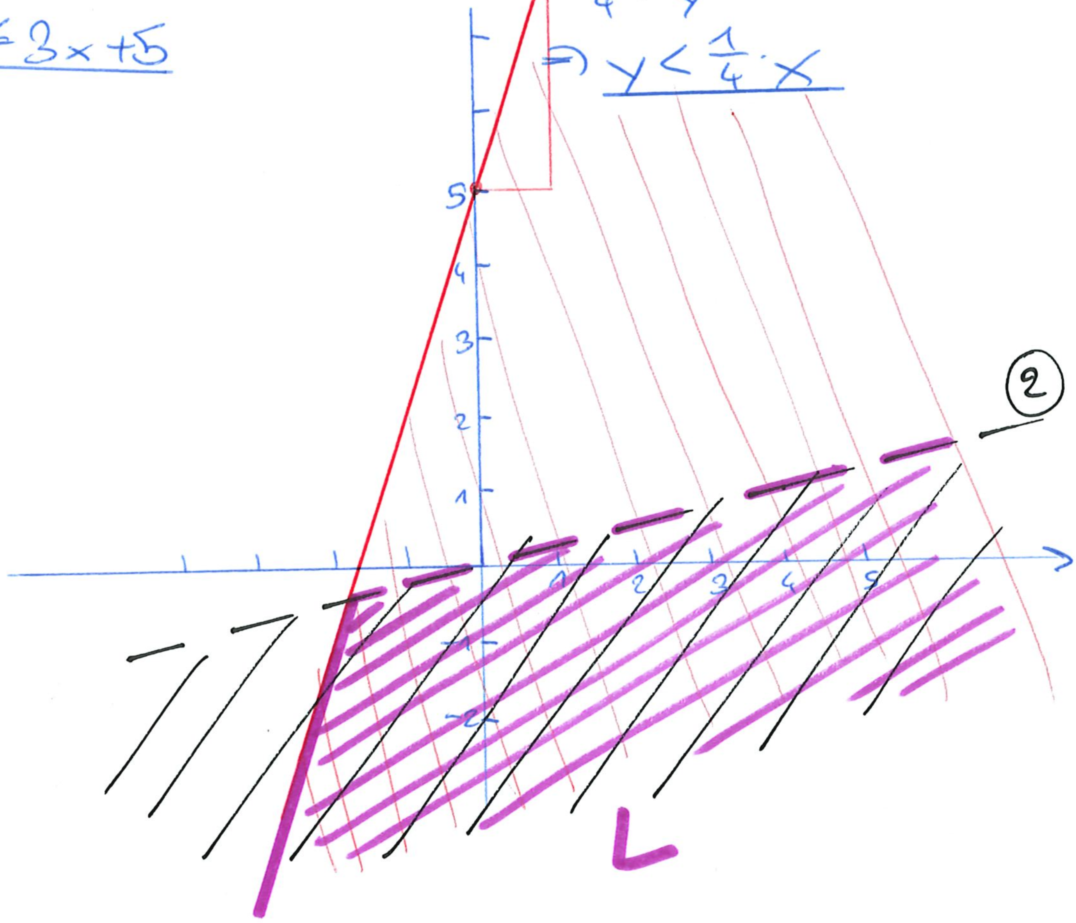
$\underline{y \le 3x + 5}$

② $x - 4y > 0 \quad | +4y$

$x > 4y \quad | :4$

$\frac{x}{4} > y$

$\Rightarrow \underline{y < \frac{1}{4} \cdot x}$



12b) ① $3x - 4y > 8 \quad | -3x$

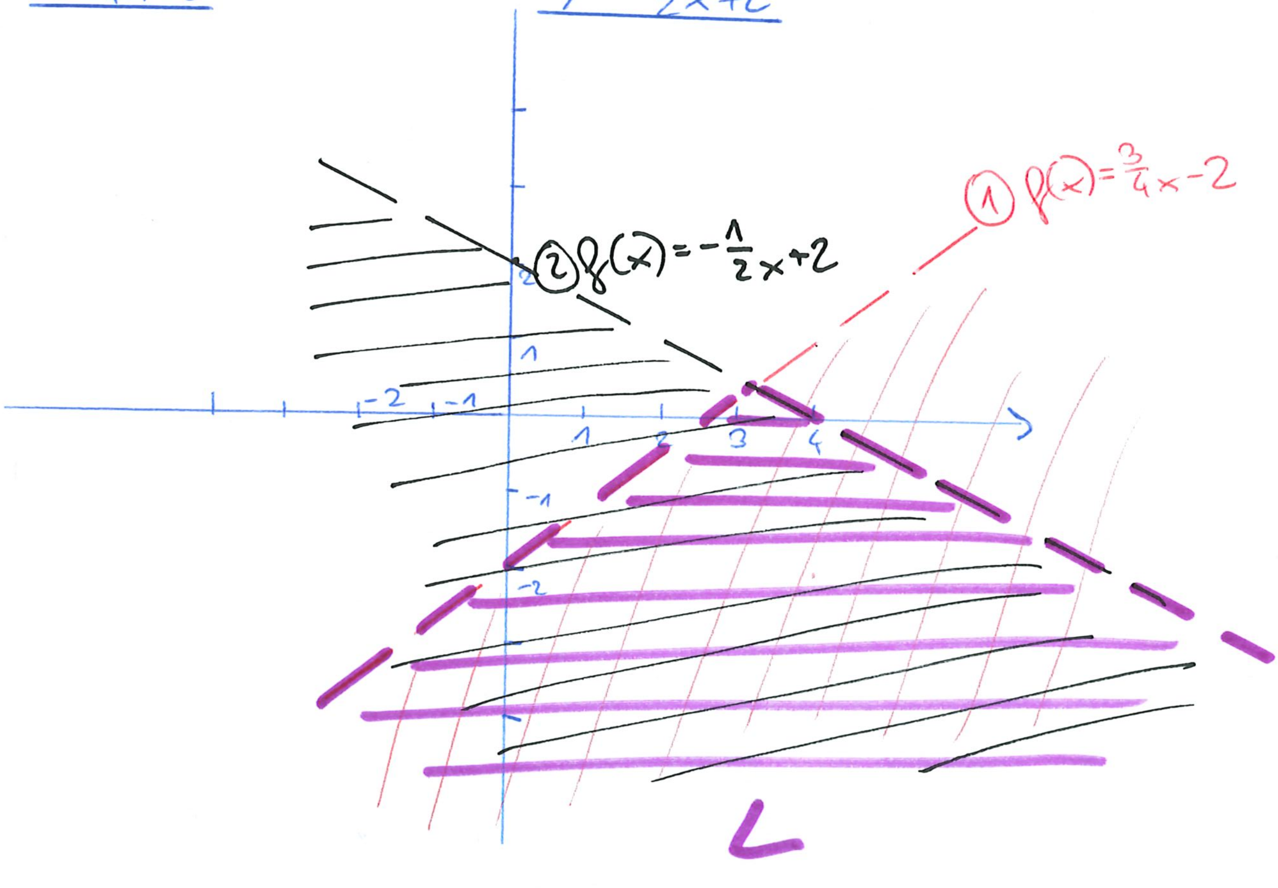
$-4y > -3x + 8 \quad | :(-4)$

$\underline{y < \frac{3}{4}x - 2}$

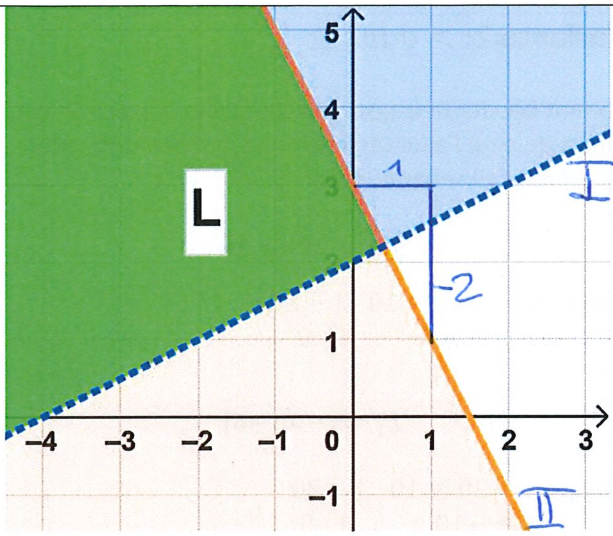
② $x + 2y < 4 \quad | -x$

$2y < -x + 4 \quad | :2$

$\underline{y < -\frac{1}{2}x + 2}$

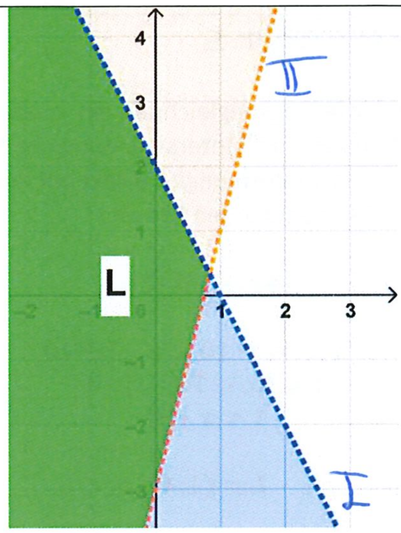


Bsp. 13) Gib das zur Lösungsmenge passende System zweier linearer Ungleichungen an.



II: $k_2 = -2 \Rightarrow y \leq -2x + 3$

I $k_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow y > \frac{1}{2}x + 2$



I $y < -2x + 2$

II $y > 4x - 3$

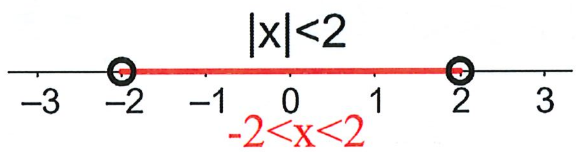
3. Betragsungleichungen

Video 8/8

Für $a > 0$ gilt:

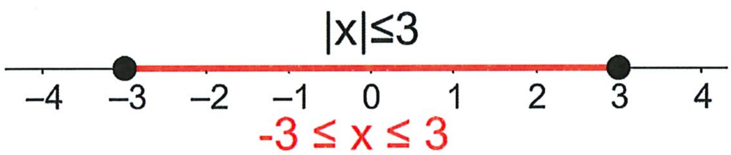
- $|x| < a$: Der Abstand der Zahl x von 0 ist kleiner als a, also: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

$\boxed{|x| < 2}$



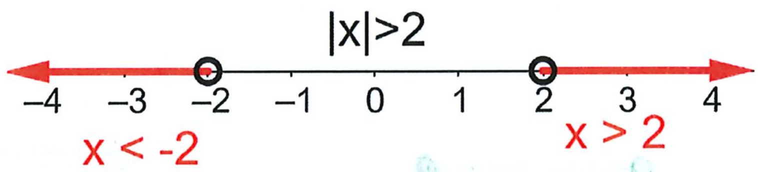
- $|x| \leq a$: Der Abstand der Zahl x von 0 ist höchstens a, also: $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

$\boxed{|x| \leq 3}$



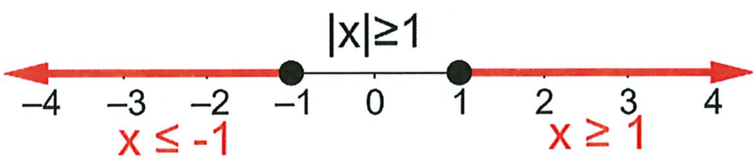
- $|x| > a$: Der Abstand der Zahl x von 0 ist größer als a, also: $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ oder } x > a$

$\boxed{|x| > 2}$



- $|x| \geq a$: Der Abstand der Zahl x von 0 beträgt mindestens a, also: $x \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ oder } x \geq a$

$\boxed{|x| \geq 1}$



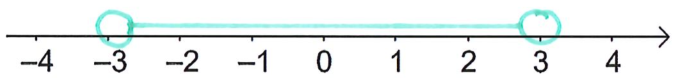
Musterbeispiele: Löse die Betragsungleichungen in der Menge $\mathbb{R}$.

Variante 1: $<$ *oder* $\leq$	**Variante 2:** $>$ *oder* $\geq$
Kommt bei der Betragsungleichung ein $<$ *oder* $\leq$ vor, so brauchst du keine Fallunterscheidung machen, da du die Äquivalenzumformungen direkt auf der linken und rechten Seite anwenden kannst: $\mathbf{\lvert 4x-10\rvert < 6}$ $-6 < 4x - 10 < 6 \quad \lvert +10$ $4 < 4x < 16 \quad \lvert :4$ $\mathbf{1 < x < 4}$ $L = (1;4)$	Kommt bei der Betragsungleichung ein $>$ *oder* $\geq$ vor, musst du eine Fallunterscheidung machen und jeden einzelnen Fall separat lösen: $\mathbf{\lvert 5x+20\rvert \geq 10}$ **Fall 1:** $5x + 20 \leq -10 \quad \lvert -20$ $5x \leq -30 \quad \lvert :5$ $x \leq -6$ $L_1 = (-\infty; -6]$ **Fall 2:** $5x + 20 \geq 10 \quad \lvert -20$ $5x \geq -10 \quad \lvert :5$ $x \geq -2$ $L_2 = [-2; +\infty)$ $L = L_1 \cup L_2 = (-\infty; -6] \cup [-2; +\infty)$

Bsp. 14) Löse die Betragsungleichung mit $G = \mathbb{R}$. Stelle die Lösungsmenge auf einem Zahlenstrahl dar.

a. $\lvert x\rvert < 3$

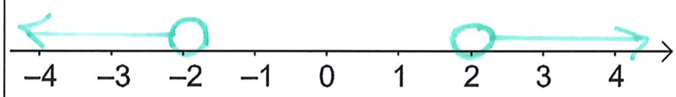
$= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$



b. $\lvert x\rvert > 2$

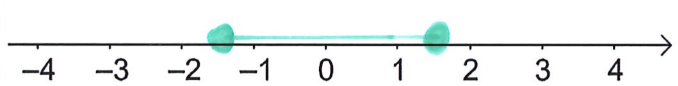
ODER

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \vee x > 2\}$



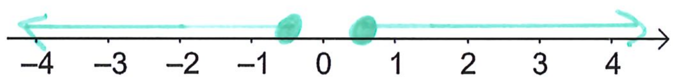
c. $\lvert x\rvert \leq 1{,}5$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid -1{,}5 \leq x \leq 1{,}5\}$



d. $\lvert x\rvert \geq 0{,}5$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -0{,}5 \vee x \geq 0{,}5$



Bsp. 15) Löse die Betragsungleichung mit $G = \mathbb{R}$.

a. $\lvert 2x-6\rvert \leq 12$ $-12 \leq 2x-6 \leq 12 \quad \lvert +6$ $-6 \leq 2x \leq 18 \quad \lvert :2$ $-3 \leq x \leq 9$ $L=[-3;9]$	**b.** $\lvert -9x+4{,}5\rvert < 22{,}5$ $-22{,}5 < -9x+4{,}5 < 22{,}5 \quad \lvert -4{,}5$ $-27 < -9x < 18 \quad \lvert :(-9)$ $3 > x > -2$ $-2 < x < 3$ $L=(-2;3)$
c. $\lvert 4x+8\rvert > 32$ Fall 1: $4x+8 < -32 \quad \lvert -8$ $4x < -40 \quad \lvert :4$ $x < -10$ $L_1=(-\infty;-10)$ Fall 2: $4x+8 > 32 \quad \lvert -8$ $4x > 24 \quad \lvert :4$ $x > 6$ $L_2=(6;+\infty)$ $L=(-\infty;-10) \cup (6;+\infty)$	**d.** $\lvert -10x-30\rvert \geq 70$ Fall 1: $-10x-30 \leq -70 \quad \lvert +30$ $-10x \leq -40 \quad \lvert :(-10)$ $x \geq 4$ $L_1=[4;+\infty)$ Fall 2: $-10x-30 \geq 70 \quad \lvert +30$ $-10x \geq 100 \quad \lvert :(-10)$ $x \leq -10$ $L_2=(-\infty;-10]$ $L=(-\infty;-10] \cup [4;+\infty)$