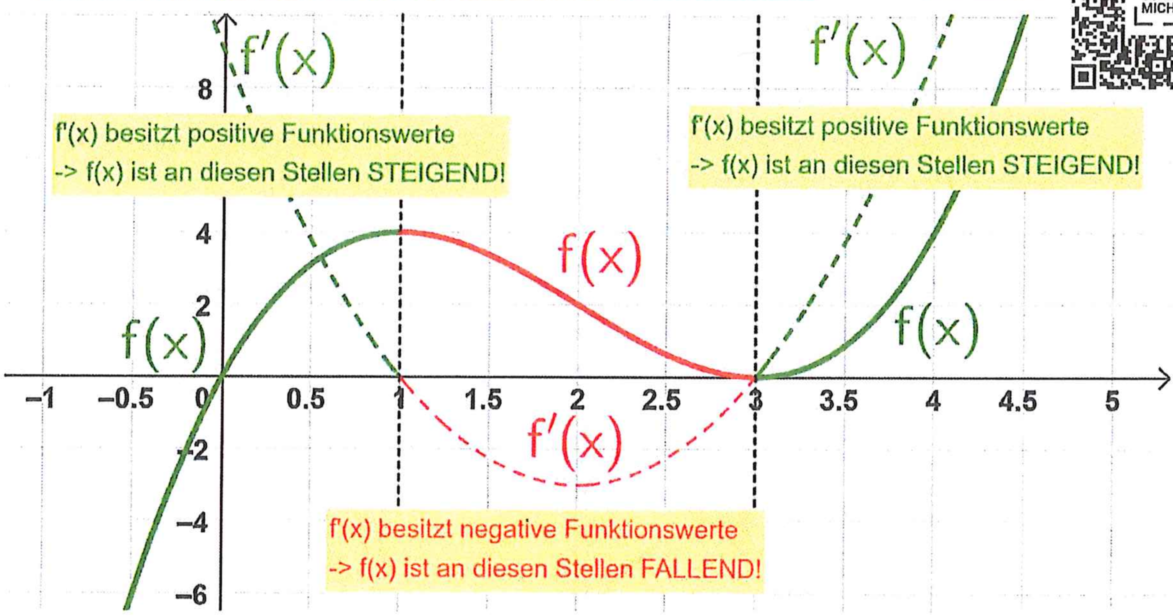
Zusammenhang Graph: Ursprüngliche Funktion und 1. Ableitung

Video 11/17



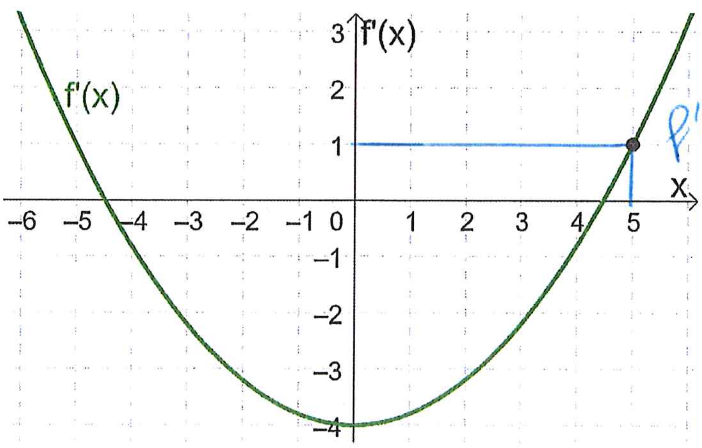
- $(-\infty; 1)$: $f'(x)$ ist zwar fallend, besitzt aber stets positive Funktionswerte. Es gilt in diesem Intervall: $f'(x) > 0$. Dies hat zur Folge, dass die ursprüngliche Funktion $f(x)$ in diesem Intervall steigend ist.

Viele SchülerInnen haben bei dieser Thematik **Vorstellungsprobleme**, warum $f(x)$ steigend ist, obwohl $f'(x)$ fallend ist. Denke immer an folgendes: **Der Funktionswert der ersten Ableitung f'(x) an der Stelle x gibt die Steigung der ursprünglichen Funktion f(x) an der Stelle x an.**
Warum ist $f'(x)$ in diesem Intervall aber fallend?! Welche Auswirkungen hat dies nun, wenn $f'(x)$ fallend ist. Dies hat zur Folge, dass die Steigung der ursprünglichen Funktion von Stelle zu Stelle abnimmt. $f(x)$ steigt in diesem Intervall stets flacher an, bis zur Stelle $x = 1$, an der die Steigung 0 ist (=Hochpunkt).

- $(1; 3)$: $f'(x)$ hat durchgehend negative Funktionswerte. Es gilt in diesem Intervall: $f'(x) < 0$. Die ursprüngliche Funktion $f(x)$ ist fallend.

- $(3; +\infty)$: $f'(x) > 0 \;\rightarrow\; f(x)$ ist in diesem Intervall steigend.

Bsp. 1) Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$. Der Punkt $P = (3|7)$ liegt auf dem Graphen der Funktion f. Bestimme die Gleichung der Tangente der Funktion f durch den Punkt P.



$f'(5) = 1$ $\quad P = (3|7)$

$t: y = 1x + d$

$7 = 1 \cdot 3 + d \quad | -3$

$4 = d$

$t: \underline{y = x + 4}$

2. Die erste Ableitung $f'(x)$:

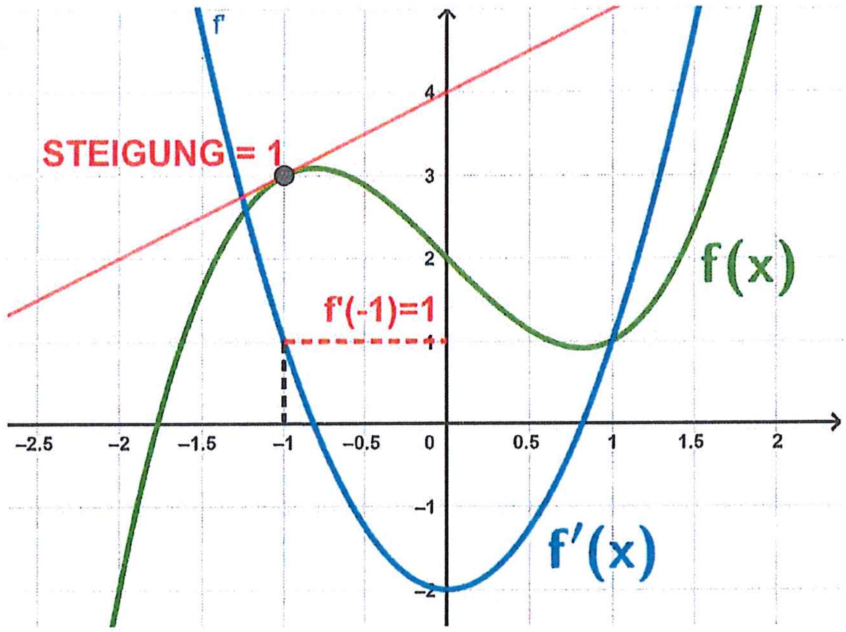
$f'(x)$ ... gibt die **Steigung** der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an der Stelle x an!

Geometrisch bedeutet die erste Ableitung die **Steigung der Tangente** im jeweiligen Punkt!

Mit der ersten Ableitung erhalten wir die Steigung **in einem einzigen (!!!) Punkt (an der Stelle x)**, da sich die Steigung stetig ändern kann (Ausnahme: Lineare Funktionen: Steigung ist immer gleich).

Beispiel: $f(x) = x^3 - 2x + 2$ -> $f'(x) = 3x^2 - 2$

Ist z.B. $f'(-1) = 1$, so steigt die Funktion f(x) an der Stelle $x = -1$ im Punkt (-1|3) um der Wert 1. Ist $f'(0) = -2$, dann fällt die Funktion f(x) im Punkt (0|2) um den Wert -2.

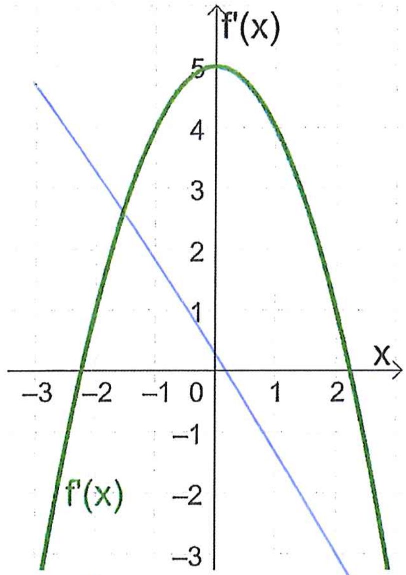


Der Funktionswert der ersten Ableitung f'(x) an der Stelle x gibt die Steigung der ursprünglichen Funktion f(x) an der Stelle x an.

- Ist $f'(x) > 0$: Dann **steigt** die Funktion f(x) an der Stelle x bzw. dem Punkt (x,f(x)).
  Betrachte den blauen Graph von f'(x): Überall, wo dieser Graph positive Funktionswerte besitzt, ist f(x) steigend.
  Im Intervall von $[-1{,}5; 1]$ ist f'(x) zwar fallend (aber noch immer >0), die zugehörige Funktion f(x) aber stets steigend (Steigung nimmt aber tendenziell ab).
- Ist $f'(x) = 0$: Dann ist die Funktion f(x) an der Stelle x **konstant** bzw. hat ***keine Steigung***.
- Ist $f'(x) < 0$: Dann **fällt** die Funktion f(x) an der Stelle x bzw. dem Punkt (x,f(x)).

Bsp. 23) Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$. Bestimme die Steigung der ursprüngliche Funktion $f(x)$ an den gesuchten Stellen.

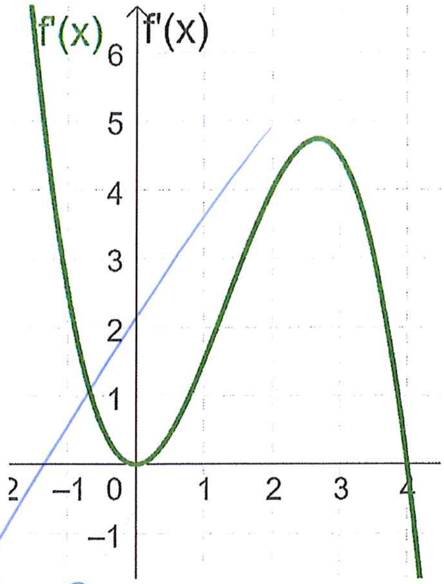
$x_1 = -2\,; x_2 = 0\,; x_3 = 1$



$f'(-2)=1$ $\quad f'(1)=4$

$f'(0)=5$

$x_1 = 0\,; x_2 = 2\,; x_3 = 4$



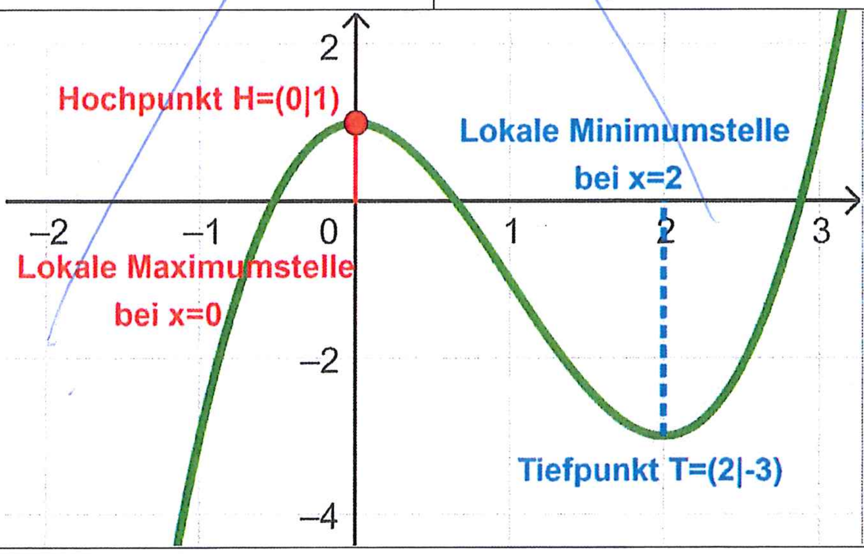
$f'(0)=0$ $\quad f'(4)=0$

$f'(2)=4$

Lokale Extremstellen

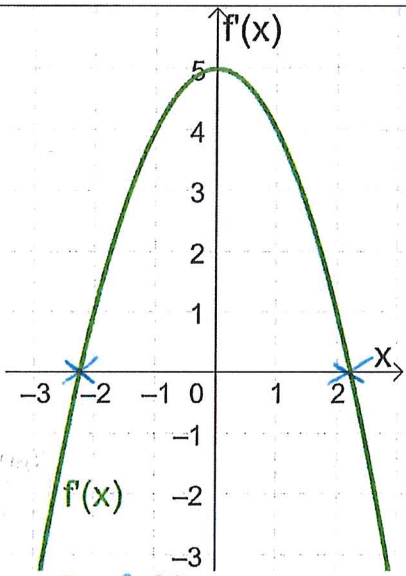
Bei lokalen Extremstellen findet stets ein **Monotoniewechsel** statt!!!

Lokale Minimumstelle	**Lokale Maximumstelle**
▪ **Monotoniewechsel**: fallend -> steigend ▪ Bemerkung: Die Minimumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Minimum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Tiefpunkt**.	▪ **Monotoniewechsel**: steigend -> fallend ▪ Bemerkung: Die Maximumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Maximum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Hochpunkt**.



Bsp. 3) Gegeben ist der Graph einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.

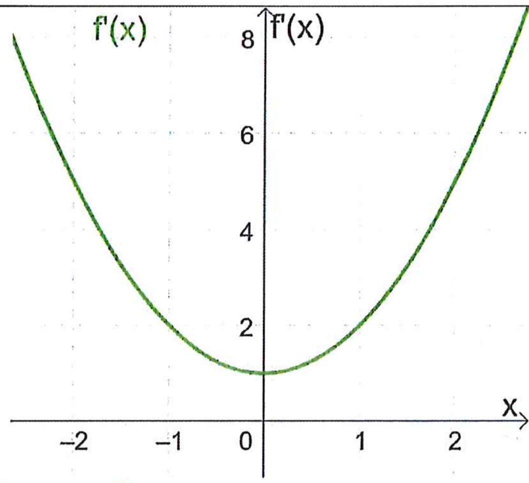
- Bestimme die möglichen Extremstellen der Funktion f und gib auch an, welcher Art sie sind.
- Bestimme das Monotonieverhalten der ursprünglichen Funktion $f(x)$.



∘ $(-\infty; -2{,}3)$: fallend] $x=-2{,}3$ ↘↗ Minimumstelle

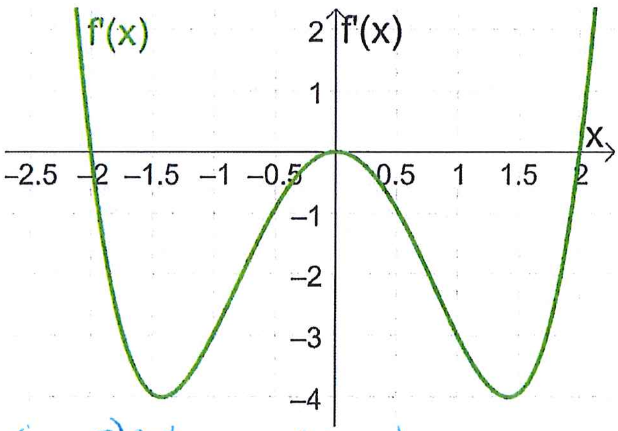
∘ $(-2{,}3; 2{,}3)$: steigend] $x=2{,}3$ ↗↘ Maximumstelle

∘ $(2{,}3; +\infty)$: fallend



∘ $(-\infty; +\infty)$: str. mon. steigend!

∘ Keine lokalen Extremstellen



∘ $(-\infty; -2)$: str. mon. steigend

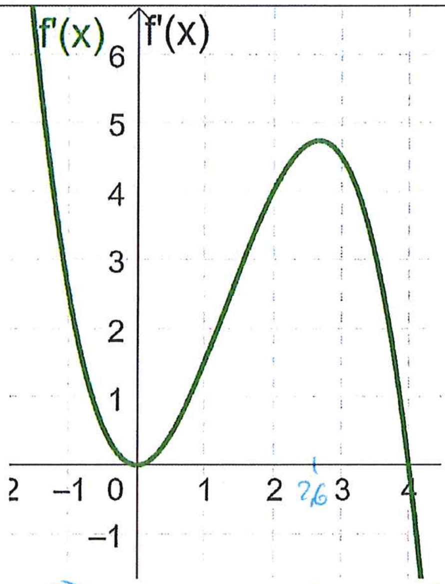
∘ $(-\infty; 2)$: str. mon. fallend

bei $x=0$: Sattelstelle

∘ $(2; +\infty)$: str. mon. steigend

$x_1=-2$ ... Maximumstelle

$x_2=2$ ... Minimumstelle



∘ $(-\infty; 4)$: str. mon. steigend

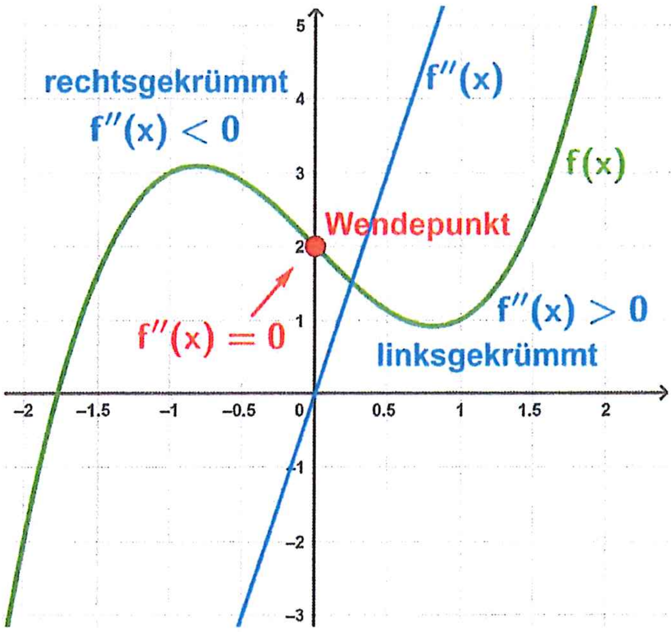
$x=0$ ... Sattelstelle

∘ $(4; +\infty)$: str. mon. fallend

$x=4$ ... Maximumstelle!

3. Die zweite Ableitung $f''(x)$:

$f''(x)$ ... gibt die Krümmung der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an der Stelle x an.



- Ist $f''(x) > 0$: Die Funktion f(x) ist an der Stelle x linksgekrümmt.
- Ist $f''(x) = 0$: Die Funktion f(x) weist an der Stelle x keine Krümmung auf.
- Ist $f''(x) < 0$: Die Funktion f(x) ist an der Stelle x rechtsgekrümmt.

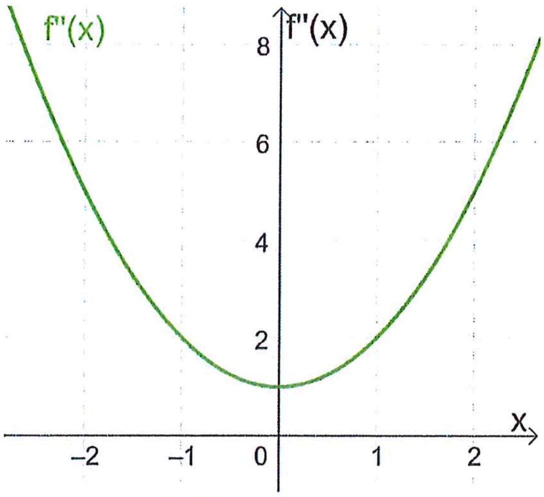
Beispiel: $f''(x) = 6x \rightarrow f''(2) = 12 \rightarrow Die\ Funktion\ f(x)\ ist\ an\ der\ Stelle$ $x = 2\ linksgekrümmt.$

4) Gegeben ist eine Funktion $f(x)$. Gib folgendes an:

(1) Die erste Ableitung f'(x) – Was gibt f'(x) an? → STEIGUNG von f(x) an der Stelle x
(2) Die zweite Ableitung f''(x) – Was gibt f''(x) an? ⇒ KRÜMMUNG — " —
(3) Steigung an den Stellen $x_1 = 3\ und\ x_2 = 7$
(4) Krümmung an den Stellen $x_1 = -4\ und\ x_2 = 8$
(5) Funktionswert & Punkt an den Stellen $x_1 = -5\ und\ x_2 = 10$

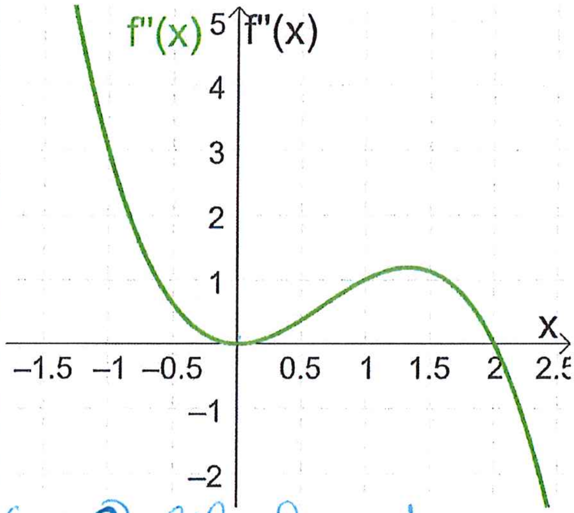
a. $f(x) = x^2 - 5x$	b. $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2$	c. $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 1$
$f'(x) = 2x - 5$ $f''(x) = 2$	$f'(x) = 12x^3 + 18x^2$ $f''(x) = 36x^2 + 36x$	$f'(x) = -6x^2 + 10x - 7$ $f''(x) = -12x + 10$
(3) $f'(3) = 1$ $f'(7) = 9$ (4) $f''(-4) = 2$ $f''(8) = 2$ (5) $f(-5) = 50 \Rightarrow P_1 = (-5\|50)$ $f(10) = 50 \Rightarrow P_2 = (10\|50)$	(3) $f'(3) = 486$ $f'(7) = 4998$ (4) $f''(-4) = 432$ $f''(8) = 2592$ (5) $f(-5) = 1123$ $P_1 = (-5\|1123)$ $f(10) = 35998$ $P_2 = (10\|35998)$	(3) $f'(3) = -31$ $f'(7) = -231$ (4) $f''(-4) = 58$ $f''(8) = -86$ (5) $f(-5) = 411$ $P_1 = (-5\|411)$ $f(10) = -1569$ $P_2 = (10\|-1569)$

Bsp. 5) Gegeben ist der Graph der zweiten Ableitung $f''(x)$. Gib das Krümmungsverhalten der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an.



$(-\infty; +\infty)$: linksgekrümmt

$f''(x)>0$

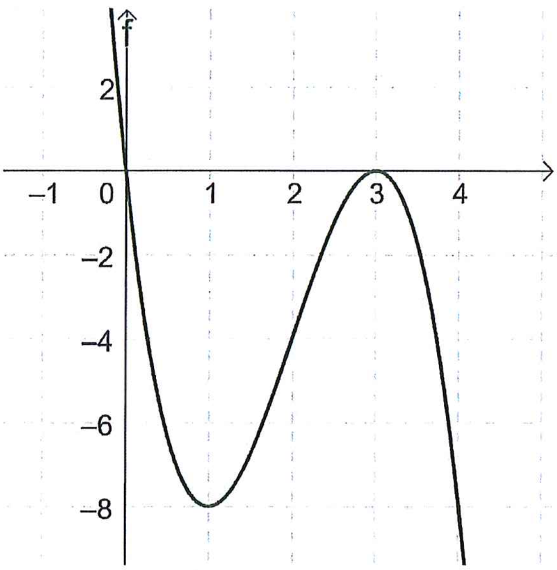


$(-\infty; 0)$: linksgekrümmt

$(0; 2)$: — " —

$(2; +\infty)$: rechtsgekrümmt

Bsp. 6) Gegeben ist der Graph einer Funktion $f(x)$. Kreuze **alle** zutreffende/n Aussagen an.



$f'(0) < 0$	X
$f'(3) = 0 \,\&\, f''(3) < 0$	X
$f''(2) = 0 \,\&\, f'''(2) \neq 0$	X
$f'(1) = 0 \,\&\, f''(1) < 0$	O
$x = 3$ ist eine lokale Maximumstelle	X
$f(1) < 0$	X
$f''(3) > 0$	O
$f(3) = 0 \,\&\, f'(3) = 0$	X
$f(2) > 0$	O
$f'(2{,}5) > 0$	X

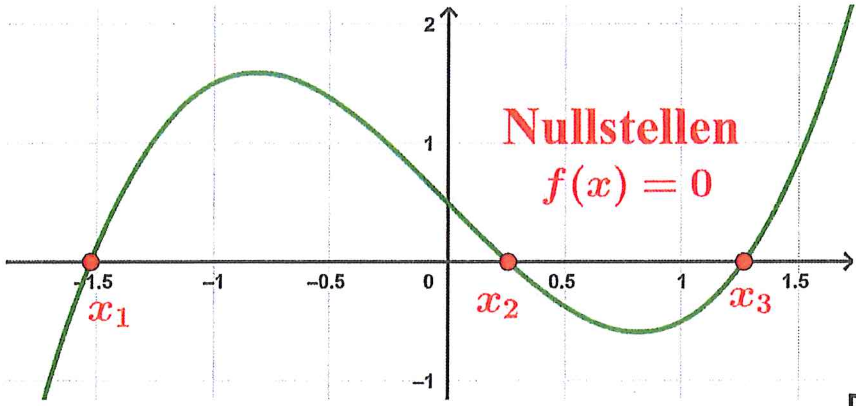
7. Anwendungen von $f(x), f'(x), f''(x)$ und $f'''(x)$:

1. Bestimmung der Nullstellen:

Nullstellen sind Stellen, an denen die Funktion die x-Achse schneidet (d.h. an denen der Funktionswert gleich 0 ist!)

Mathematisch können Nullstellen ermittelt werden, wenn man die Funktion $f(x)$, die die Funktionswerte liefern, 0 setzt.

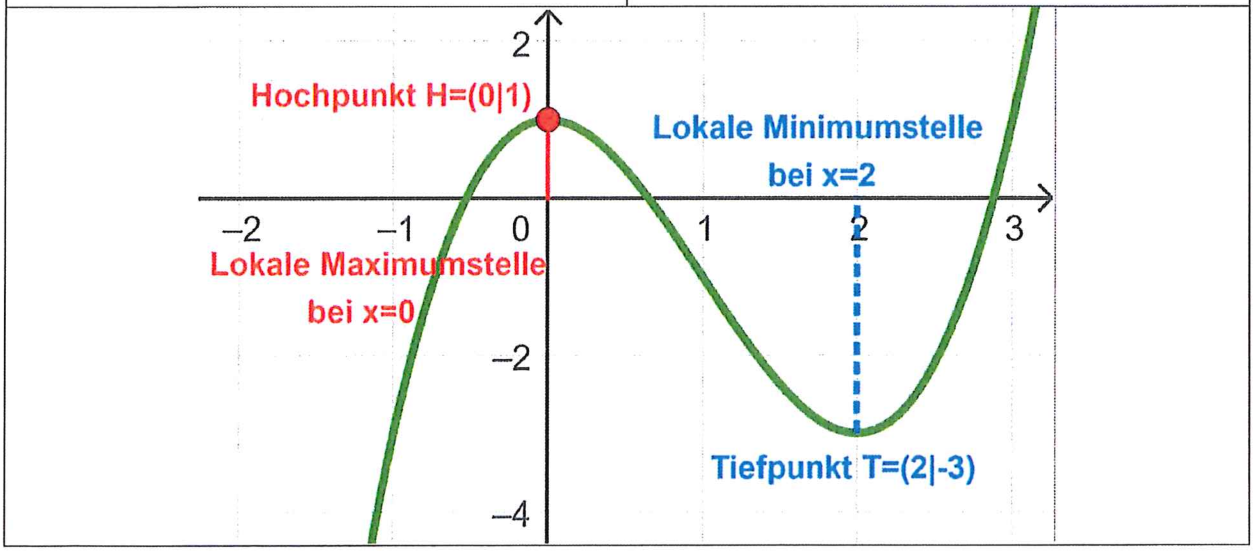
$$f(x) = 0$$



Video 12/17

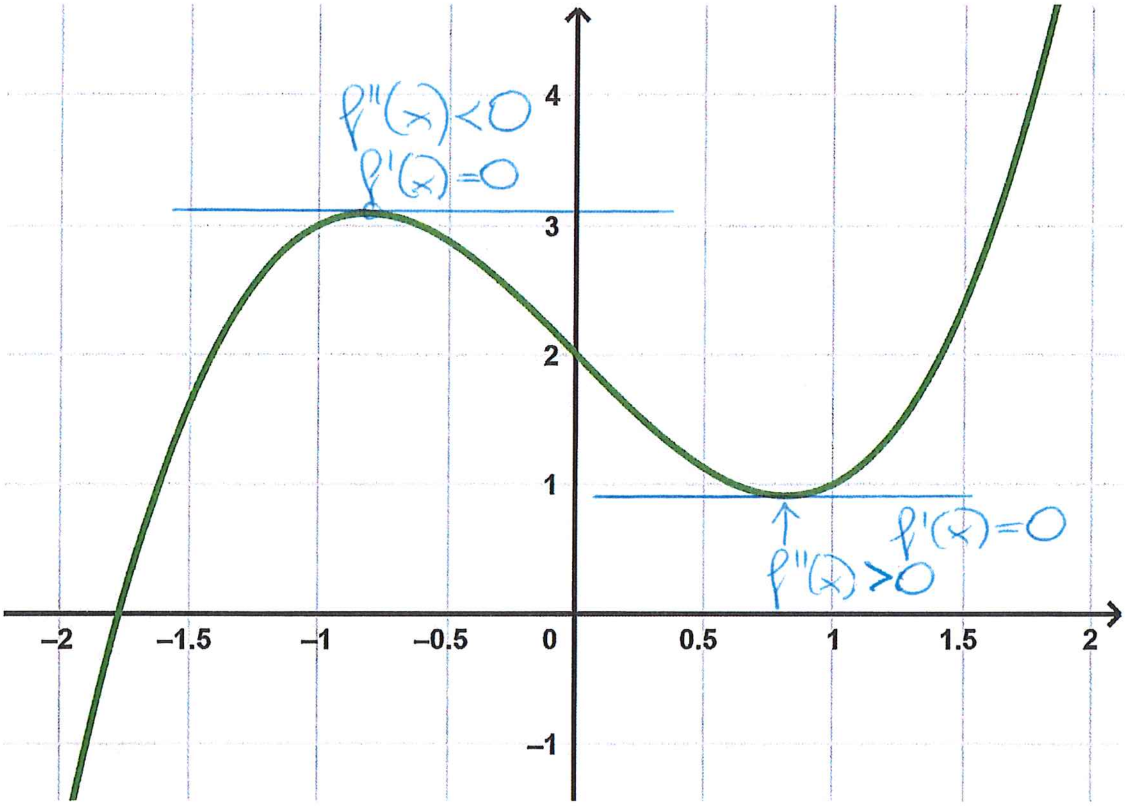
2. Bestimmung der Extremstellen:

Wiederholung: Lokale Extremstellen	
Bei lokalen Extremstellen findet stets ein **Monotoniewechsel** statt!!!	
Lokale Minimumstelle ▪ **Monotoniewechsel**: fallend -> steigend ▪ Bemerkung: Die Minimumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Minimum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Tiefpunkt**.	**Lokale Maximumstelle** ▪ **Monotoniewechsel**: steigend -> fallend ▪ Bemerkung: Die Maximumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Maximum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Hochpunkt**.



Mit der **Differentialrechnung** möchten wir nun **rechnerisch** bestimmen, ob eine Funktion Extremstellen besitzt & um welche es sich dabei handelt.

Frage 1: Wie groß ist Steigung an Extremstellen?
Frage 2: Wie ist der Graph bei einem Hochpunkt bzw. Tiefpunkt gekrümmt?

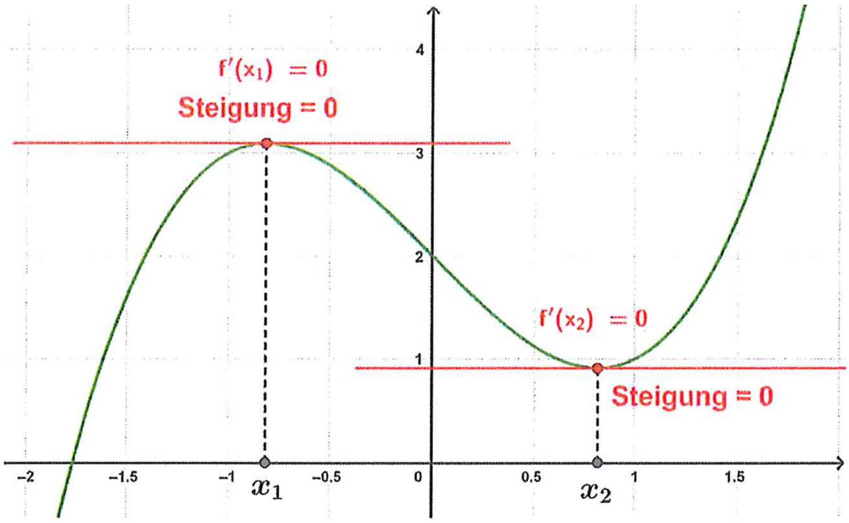


Schritt 1 (Notwendige Bedingung): An Extremstellen gibt es **keine Steigung**, da entweder der maximale, oder der minimale Wert erreicht ist:

$$f'(x) = 0$$

Mit dieser **Gleichung** erhältst du **alle Stellen** (x-Werte), an denen die **Steigung 0 ist**!

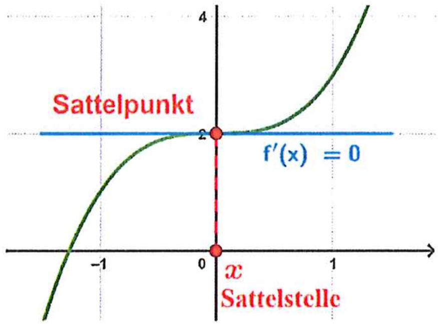
! Nicht mehr, aber auch nicht weniger !



Man kann noch nicht sagen, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt (oder sogar keines von beiden – siehe Ausnahme)!

Ausnahme:

An sogenannten Sattelstellen ist die Steigung der Polynomfunktion 0. Im Gegensatz zu einer Extremstelle ändert sich das Monotonieverhalten nicht (kein Extremum!).



Schritt 2 (Hinreichende Bedingung): Jetzt klären wir, ob es sich um eine **Maximum-**, **Minimum**- oder gar eine **Sattelstelle** handelt. Dafür musst du den Verlauf der Funktion betrachten. An all diesen Stellen ist die Steigung wie gesagt 0!

ABER: welchen Wert nimmt die Krümmung an – Ist die Funktion an dieser Stelle links- oder rechtsgekrümmt, oder herrscht gar keine Krümmung?

Setze dazu die in – Schritt 1 – erhaltenen x-Werte nun in die 2. Ableitung ein:

➔ Ist die Funktion rechtsgekrümmt ($f''(x) < 0$), kann es sich nur um eine Maximumstelle handeln!

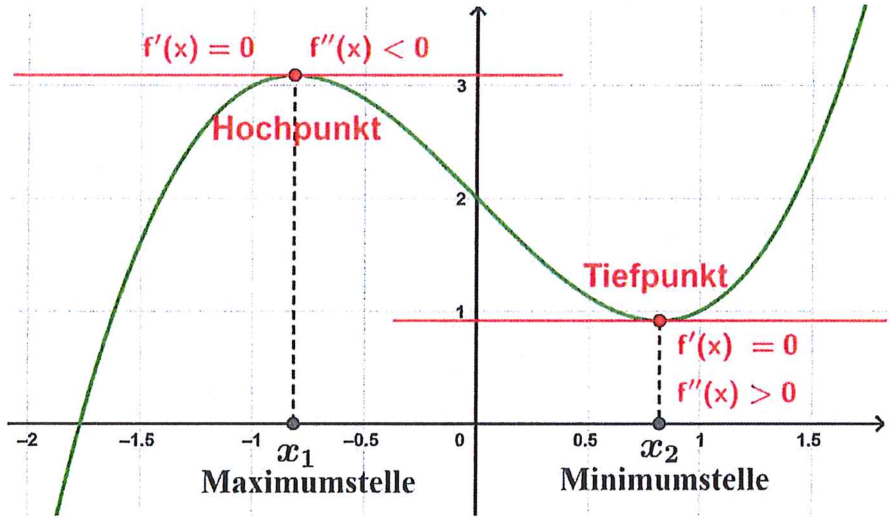
Steigung $= 0 : f'(x) = 0$
Rechtsgekrümmt: $f''(x) < 0$

➔ Ist die Funktion linksgekrümmt ($f''(x) > 0$), kann es sich nur um eine Minimumstelle handeln!

Steigung $= 0 : f'(x) = 0$
Linksgekrümmt: $f''(x) > 0$

➔ Herrscht keine Krümmung vor ($f''(x) = 0$), -> Sattelstelle (Achtung: KEINE Extremstelle)

Schritt 3: Mit den Maximum- und Minimumstellen erhält man nur die x-Werte der Extrempunkte. Möchtest du die fehlende y-Koordinate zur Bestimmung des zugehörigen Punktes erhalten (Hoch- und Tiefpunkt), so musst du die x-Werte in die ursprüngliche Funktion f(x) einsetzen!



Schritt 1
$f'(x) = 0$

Schritt 2
erhaltene x-Werte in die zweite Ableitung $f''(x)$ einsetzen
$f''(x) > 0$ *Minimumstelle*
$f''(x) < 0$ *Maximumstelle*
$f''(x) = 0$ *Sattelstelle*

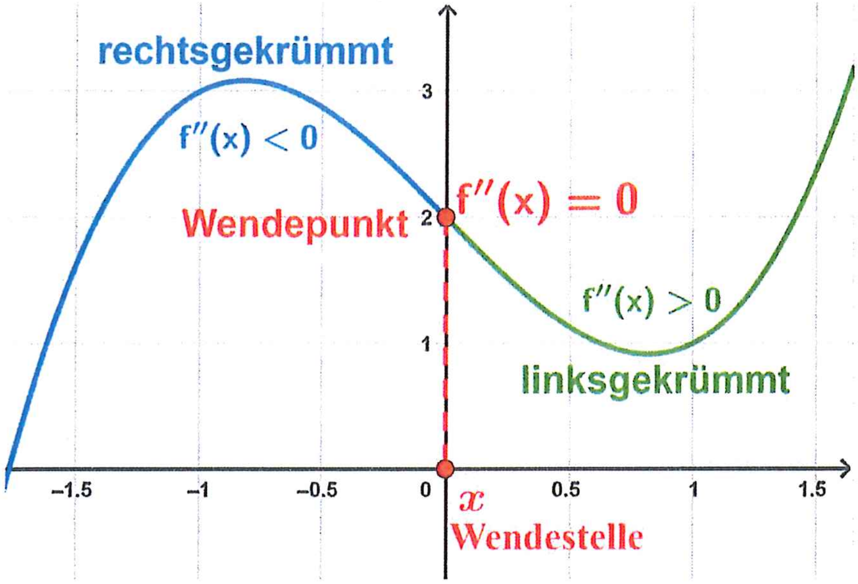
Schritt 3
Hochpunkt/Tiefpunkt
x-Wert in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen (=zugehörige y-Koordinate)

Bsp. 7) Gegeben ist eine Funktion f. Bestimme mit Hilfe der **Differentialrechnung** (Denk- und Rechenschritte müssen nachvollziehbar sein!) die Extremstellen. Gib nachweislich an, um welche Extremstellen es sich dabei handelt. Welche besonderen Punkte liegen an diesen Stellen? Gib die Koordinaten an.

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$	b. $f(x) = -4x^2 + 10$	c. $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 7$
$f'(x)=3x^2-6x+2$ $f''(x)=6x-6$	$f'(x)=-8x$ $f''(x)=-8$	$f'(x)=8x^3-8x$ $f''(x)=24x^2-8$
① $f'(x)=0$: $3x^2-6x+2=0$ $\Rightarrow x_1\approx 0{,}42$; $x_2\approx 1{,}58$ ② $f''(0{,}42)=-3{,}48<0$ MAX. $f''(1{,}58)=3{,}48>0$ MIN. ③ $f(0{,}42)=0{,}38$ $H=(0{,}42 \mid 0{,}38)$ $f(1{,}58)\approx -0{,}38$ $T=(1{,}58 \mid -0{,}38)$	① $f'(x)=0$ $-8x=0 \quad \mid :(-8)$ $x=0$ ② $f''(0)=-8<0$ $\rightsquigarrow x=0$... MAXIMUM ③ $f(0)=10$ $\Rightarrow H=(0 \mid 10)$	① $f'(x)=0$: $8x^3-8x=0$ $\Rightarrow x_1=-1$; $x_2=0$; $x_3=1$ ② $f''(-1)=16>0$ MIN $f''(0)=-8<0$ MAX $f''(1)=16>0$ MIN ③ $f(-1)=-9 \rightsquigarrow T=(-1 \mid -9)$ $f(0)=-7 \rightsquigarrow H=(0 \mid -7)$ $f(1)=-9 \rightsquigarrow T=(1 \mid -9)$

3. Bestimmung der Wendestellen:

Video 13/17



Schritt 1 (Notwendige Bedingung): An Wendestellen herrscht **keine Krümmung**, d.h.

$$f''(x) = 0$$

Bei Wendestellen ändert sich das Krümmungsverhalten (von linksgekrümmt auf rechtsgekrümmt, bzw. umgekehrt).

Schritt 2 (Hinreichende Bedingung): Um sicher zu gehen, dass es sich um eine Wendestelle handelt, muss folgende Bedingung gelten:

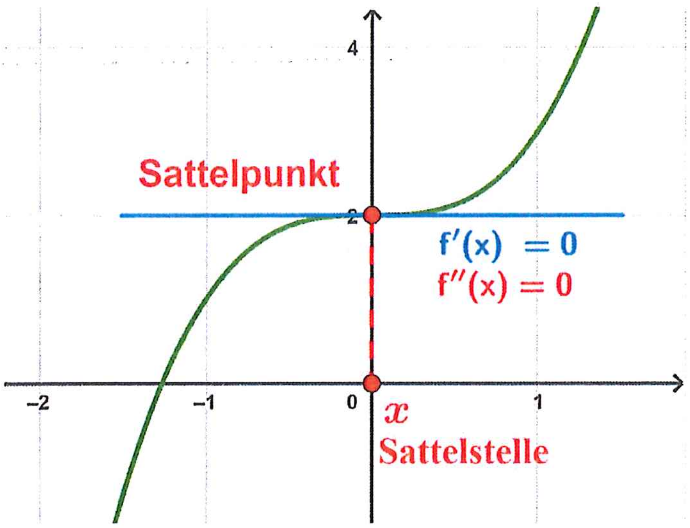
$$f'''(x) \neq 0$$

Schritt 1
$f''(x) = 0$

Schritt 2
erhaltenen x-Wert in die dritte Ableitung $f'''(x)$ einsetzen:
$f'''(x) \neq 0$ *Wendestelle*

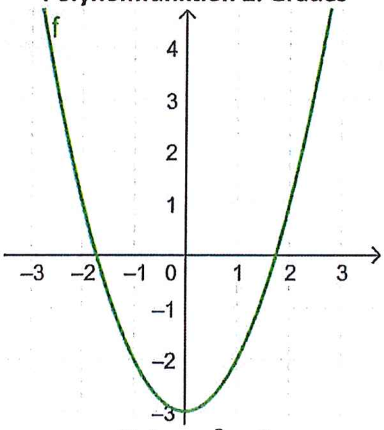
Schritt 3
Wendepunkt
x-Wert in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen (=zugehörige y-Koordinate)

Bemerkung: Eine Sattelstelle ist ein Sonderfall einer Wendestelle, da zusätzlich die Steigung 0 ist! Eine Sattelstelle ist aber kein Extremum, da sich das Monotonieverhalten **nicht** ändert!



Kann eine Polynomfunktion 2. Grades einen Wendepunkt besitzen?!

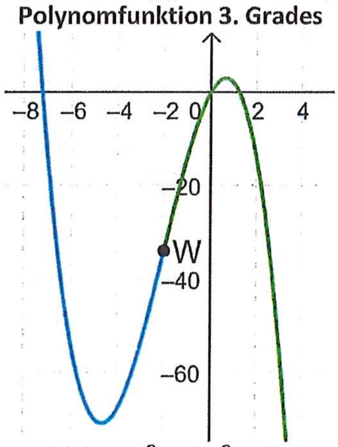
Polynomfunktion 2. Grades



$$f(x) = x^2 - 3$$
$$f'(x) = 2x$$
$$f''(x) = 2 \rightarrow f''(x) = 0 \text{ nicht lösbar!}$$
$$f'''(x) = 0$$

Eine Polynomfunktion 2. Grades besitzt keinen Wendepunkt (ist für alle Stellen gleich gekrümmt).

Polynomfunktion 3. Grades



$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$f''(x) = 6x - 12$$
$$f'''(x) = 6$$

Eine Polynomfunktion 3. Grades besitzt stets einen Wendepunkt. Die hinreichende Bedingung $f'''(x) \neq 0$ wird aufgrund des 3. Grades erfüllt.

Bestimmung der Wendetangente

1] Bestimmung des Wendepunktes

$$f''(x) = 0 \;\&\; f'''(x) \neq 0$$
$$W = (x|f(x))$$

2] Wendetangente: $t_w: y = kx + d$

2.1] Bestimmung der Steigung k:

$$k = f'(x)$$

2.2] Bestimmung der Steigung d:
Wendepunkt in die Funktionsgleichung der Wendetangente einsetzen & umformen.

Musterbeispiel:

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$$
$$f'(x) = -3x^2 + 12x + 9$$
$$f''(x) = -6x + 12$$
$$f'''(x) = -6$$

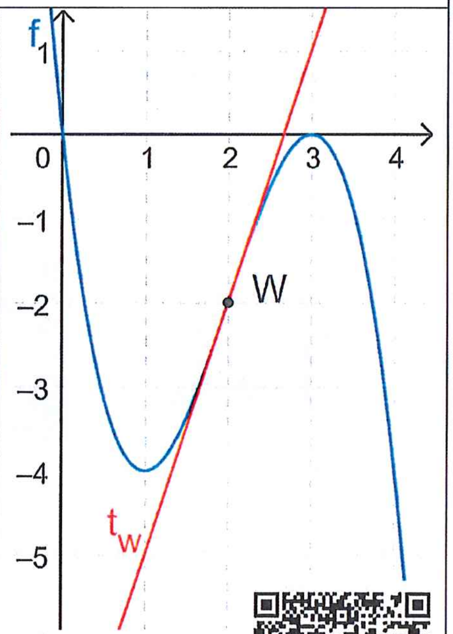
$$f''(x) = 0 \rightarrow \quad x = 2$$
$$f'''(2) = -6 \;\neq 0 \;\checkmark$$
$$x = 2 \ldots Wendestelle$$
$$f(2) = -2 \rightarrow \boldsymbol{W} = (\mathbf{2}|\mathbf{-2})$$

Wendetangente:

$$t_w: y = kx + d$$

$$k = f'(2) = 3$$
$$t_w: -2 = 3 \cdot 2 + d \quad |-6$$
$$d = -8$$

$$\boldsymbol{t_w: y = 3x - 8}$$



Bsp. 8) Gegeben ist eine Funktion f.

Video 14/17

a. Bestimme mit die Nullstellen.
b. Bestimme mit Hilfe der **Differentialrechnung** (Denk- und Rechenschritte müssen nachvollziehbar sein!) die Extremstellen. Gib nachweislich an, um welche Extremstellen es sich dabei handelt. Welche besonderen Punkte liegen an diesen Stellen? Gib die Koordinaten an.
c. Bestimme mit Hilfe der Differentialrechnung (Denk- und Rechenschritte!) die Wendestelle/n bzw. Wendepunkt/e. Gib (falls vorhanden) die Wendetangente/n an.

d. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	e. $f(x) = x^2 - 4$	f. $f(x) = x^4 - 2x^2$
g. $f(x) = x^3 + 1$	h. $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x$	i. $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 14$

Bsp. 9 Die Funktion $h(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}70x$ beschreibt die Flugbahn eines Fußballs beim Abstoß eines Tormanns.

- x gibt die horizontale Entfernung (in Meter) des Fußballs vom Abschusspunkt an.
- h(x) gibt die Höhe des Fußballs (in Meter) nach x Metern an.

Video 15/17

a. Wähle einen passenden Definitionsbereich für dieses Beispiel.

b. Nach wie vielen Metern erreicht der Ball eine Höhe von 10m?

c. In welcher Höhe befindet sich der Fußball bei einer horizontalen Entfernung von 40m?

d. Bestimme mit Hilfe der **Differentialrechnung**, nach wie vielen Metern der Ball seine maximale Höhe erreicht. Zeige nachweislich, dass des sich um ein Maximum handelt.

Bsp. 10 Die Funktion s(t) gibt die zurückgelegte Strecke eines Autos (Einheit: Meter) in Abhängigkeit der Zeit t in Sekunden an. Die Funktion s(t) ist im Intervall $[0; 40]$ definiert. Für die zurückgelegte Strecke gilt

$$s(t) = -\frac{1}{64}t^3 + \frac{15}{16}t^2$$

a. Berechne den Ausdruck $s(30) - s(15)$ und interpretiere dein Ergebnis im gegebenen Kontext.

b. Bestimme die mittlere Geschwindigkeit v_m des Autos im Zeitintervall $[5; 20]$. Verwende passende Einheiten.

c. Bestimme die Werte $s'(10)$ und $s''(25)$ und interpretiere diese mit korrekten Einheiten im Kontext.

d. Bestimme mit Hilfe der Differentialrechnung, wann das Auto die **maximale Geschwindigkeit** erreicht.

Bsp. 11 Ordne den möglichen Eigenschaften einer Funktion f die entsprechende formale Aussage zu!

Aufgabenstellung:

f hat an der Stelle x eine Minimumstelle	D
f hat an der Stelle x eine Nullstelle	C
f besitzt an der Stelle x eine Sattelstelle	B
f hat an der Stelle x die Steigung 2	F

A	$f'(x) = 0 \,\&\, f''(x) < 0$
B	$f'(x) = 0 \,\&\, f''(x) = 0$
C	$f(x) = 0$
D	$f'(x) = 0 \,\&\, f''(x) > 0$
E	$f'(x) = 2$
F	$f'(2) = 2$

Bsp. 12) Der zurückgelegte Weg eines Autos kann näherungsweise durch die Funktion s(t) beschrieben werden:

$$s(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + \frac{t}{3} \quad mit\ 0 \leq t \leq 3$$

- t ... Zeit in Minuten
- s(t) ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in Kilometer

a. Berechne, nach welcher Zeit t_0 die Beschleunigung im angegebenen Intervall 0 ist.
b. Zeige nachweislich, dass die Geschwindigkeit zu dieser Zeit t_0 maximal ist.

Bsp. 13) Bestimme die Wendestelle/n der gegebenen Funktion. Was fällt dir auf?!

$f(x) = x^4$	$f(x) = x^5$
$f'(x) = 4x^3 \rightsquigarrow f''(x) = 12x^2$ ① $f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 = 0$ $x = 0$ ② $f'''(x) = 24x \rightsquigarrow f'''(0) = 0$ ↯ Keine Wendestelle?!	$f'(x) = 5x^4 \quad f''(x) = 20x^3$ $f'''(x) = 60x^2$ ① $f''(x) = 0 \rightsquigarrow x = 0$ ② $f'''(0) = 0$ ↯

Bemerkung:

Ist die 3. Ableitung an der **Wendestelle** Null – $f'''(x) = 0$ – so musst du die Funktion weiter differenzieren (=ableiten), bis eine **Ableitung ungleich Null** ist.

- Ist diese Ableitung ungerader Ordnung, also die 5., 7., 9. Ableitung, dann hast du dort einen Wendepunkt.
  Bsp.: Die Funktion $f(x) = x^7$ besitzt an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt.

- Ist diese Ableitung gerader Ordnung, also die 4., 6., 8. Ableitung, dann handelt es sich um einen Extrempunkt an dieser Stelle (Hoch- bzw. Tiefpunkt).
  Bsp.: Die Funktion $f(x) = x^6$ besitzt an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt.

Bsp. 14) Bestimme mögliche Extrem- bzw. Wendestellen der gegebenen Funktionen.

$f(x) = -2x^5$	$f(x) = 0{,}1x^6$
① $f'(x) = -10x^4 \quad f''(x) = -40x^3$ $\rightsquigarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ② $f'''(x) = -120x^2 \Rightarrow f'''(0) = 0$ ↓ $f''''(x) = -240x$ $f'''''(x) = -240$ ← 5. Ableitung $\Rightarrow x = 0$ Wendestelle	① $f'(x) = 0{,}6x^5 \quad f''(x) = 3x^4$ $\rightsquigarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ② $f'''(x) = 12x^3 \Rightarrow f'''(0) = 0$ ↓ $f''''(x) = 36x^2$ $f'''''(x) = 72x$ $f''''''(x) = 72$ ↑ 6. Ableitung $\Rightarrow x = 0$ Extremstelle!

8e) $f(x)=x^3-6x^2+9x$ $\quad f'(x)=3x^2-12x+9$ (1)

$f''(x)=6x-12$

$f'''(x)=6$

(1) $f(x)=0$

$x^3-6x^2+9x=0$

$\hookrightarrow x_1=0 \quad x_2=3$

(2) $f'(x)=0$

$3x^2-12x+9=0$

$\hookrightarrow x_1=1 \rightarrow f''(1)=-6<0$ $\quad x_1 \ldots$ Maximumstelle

$f(1)=4 \rightarrow \underline{\underline{H=(1|4)}}$

$\hookrightarrow x_2=3 \rightarrow f''(3)=6>0$ $\quad x_2 \ldots$ Minimumstelle

$f(3)=0 \rightarrow \underline{\underline{T=(3|0)}}$

(3) $f''(x)=0$

$6x-12=0$

$6x=12$

$x=2$

$f'''(2)=6\neq0$ ✓

$f(2)=2$

$\underline{\underline{W=(2|2)}}$

Wendetangente:

$t: y=kx+d$

$f'(2)=-3$

$t: y=-3x+d$

$t: 2=-6+d \quad |+6$

$8=d$

$\underline{\underline{t_w: y=-3x+8}}$

b) $f(x) = x^2 - 4$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

① $f(x) = 0$

$x_1 = -2$ $x_2 = 2$

② $f'(x) = 0$

$2x = 0$

$x = 0$

$f''(0) = 2 \Rightarrow x = 0$ Minimumstelle

$\Rightarrow f(0) = -4 \Rightarrow T = (0|-4)$

③ Keine Wendestelle! $f''(x) = 0$ $2 \neq 0$ ↯

c) $f(x) = x^4 - 2x^2$

① $x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x_1 \approx -1,4$ $x_2 \approx 0$ $x_3 \approx 1,4$

② $f'(x) = 4x^3 - 4x$ $f''(x) = 12x^2 - 4$ $f'''(x) = 24x$

$f'(x) = 0$

- $x_1 = -1 \Rightarrow f''(-1) = 8 > 0$ MINIMUM $\Rightarrow f(-1) = -1$ $T_1 = (-1|-1)$
- $x_2 = 0 \Rightarrow f''(0) = -4 < 0$ MAXIMUM $\Rightarrow f(0) = 0$ $H = (0|0)$
- $x_3 = 1 \Rightarrow f''(1) = 8 > 0$ MINIMUM $\Rightarrow f(1) = -1$ $T_2 = (1|-1)$

③ $f''(x) = 0$

$x_1 = -0,58$

$f'''(-0,58) = -13,8 \neq 0$ ✓

$f(-0,58) = -0,56 \Rightarrow W_1 = (-0,58|-0,56)$

$f'(-0,58) = 1,54$

$t_{W_1}: y = 1,54x + 0,33$

$x_2 = +0,58$

$f'''(0,58) = 13,8 \neq 0$ ✓

$f(0,58) = -0,56 \Rightarrow W_2 = (0,58|-0,56)$

$f'(0,58) = -1,54 \Rightarrow t_W: y = -1,54x + 0,33$

8d) $f(x)=x^3+1$ $f'(x)=3x^2$ $f''(x)=6x$ $f'''(x)=6$ ③

① $f(x)=0 \rightarrow x_1=-1$

② $f'(x)=0 \rightarrow x=0$ $f''(0)=0 \Rightarrow x=0$ Sattelstelle

$f(0)=1 \Rightarrow S=(0|1)$

③ $f''(x)=0 \Rightarrow x=0$ $f'''(0)=6\neq 0$ ✓

$S=W=(0|1)$

- $f'(0)=0$ $T_W: y=0\cdot x+d$ $\Rightarrow T_W: y=1$
  $1=d$

8e) $f(x)=-2x^3+12x^2-18x$
$f'(x)=-6x^2+24x-18$ $f''(x)=-12x+24$ $f'''(x)=-12$

① $f(x)=0 \rightarrow x_1=0$ $x_2=3$

② $f'(x)=0 \rightarrow$

- $x_1=1 \Rightarrow f''(1)=12>0$ MINIMUM
  $f(1)=-8$ $T=(1|-8)$
- $x_2=3 \Rightarrow f''(3)=-12<0$ MAXIMUM
  $f(3)=0$ $H=(3|0)$

③ $f''(x)=0$
$\hookrightarrow x=2$ $f'''(2)=-12\neq 0$ ✓
$f(2)=-4$ $W=(2|-4)$

T: $f'(2)=6$

$y=6x+d$
$-4=12+d$ $\Rightarrow T_W: y=6x-16$
$d=-16$

8 f.) $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 14$

$f'(x) = -4x^3 + 16x \quad f''(x) = -12x^2 + 16 \quad f'''(x) = -24x$

① $f(x) = 0$

$x_1 = -2{,}3 \quad x_2 \approx -1{,}6 \quad x_3 \approx 1{,}6 \quad x_4 \approx 2{,}3$

② $f'(x) = 0$

$x_1 = -2 \Rightarrow f''(-2) = -32 < 0 \Rightarrow f(-2) = 2 \Rightarrow H_1 = (-2|2)$

MAXIMUM

$x_2 = 0 \Rightarrow f''(0) = 16 > 0 \Rightarrow f(0) = -14 \Rightarrow T = (0|-14)$

MINIMUM

$x_3 = 2 \Rightarrow f''(2) = -32 < 0 \Rightarrow f(2) = 2 \Rightarrow H_2 = (2|2)$

MAXIMUM

③ $f''(x) = 0$

- $x_1 \approx -1{,}2 \quad f'''(-1{,}2) \approx 28{,}8 \neq 0 \quad W_1 = (-1{,}2|-5{,}1)$
- $x_2 \approx 1{,}2 \quad f'''(1{,}2) \approx -28{,}8 \neq 0 \quad W_2 = (1{,}2|-5{,}1)$

t_1: $f'(-1{,}2) \approx -12{,}3$

$\Rightarrow t_1: y = -12{,}3x - 19{,}3$

t_2: $f'(1{,}2) \approx 12{,}3$

$t_2: y = 12{,}3x - 19{,}3$

9) $h(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}7x$

$h'(x) = v(x) = -0{,}02x + 0{,}7$

$h''(x) = -0{,}02 \quad (= a(x))$

a) $h(x) = 0$

$\hookrightarrow x_1 = 0$

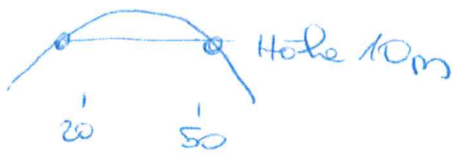
$\hookrightarrow x_2 = 70 \quad \rightsquigarrow D = [0; 70]$

b) $h(x) = 10$

Geo-Gebra $\hookrightarrow -0{,}01x^2 + 0{,}7x = 10$

$\Rightarrow x_1 = 20\,m \qquad x_2 = 50\,m$

Nach 20m & 50m.



c) $h(40) = \underline{12\,m}$

d) $h'(x) = 0 \quad \rightsquigarrow x = 35$

$h''(35) = -0{,}02 < 0$ MAXIMUM!

$\rightsquigarrow$ Nach 35m erreicht der Ball seine maximale Höhe!

$\Downarrow$

$h(35) = 12{,}25\,m$

10) $s(t) = -\frac{1}{64}t^3 + \frac{15}{16}t^2$

$s'(t) = v(t) = -\frac{3}{64}t^2 + \frac{30}{16}t$

$s''(t) = a(t) = -\frac{6}{64}t + \frac{30}{16}$

---

a) $s(30) - s(15) = 421{,}9 - 158{,}2 \approx \underline{\underline{263{,}7\,m}}$

Zwischen der 15. & 30. Sekunde wurden ca. 263,7 m zurückgelegt!

b) $\frac{s(20)-s(5)}{20-5} \approx \underline{\underline{15{,}2\,\frac{m}{s}}}$

c) $s'(10) = 14{,}1\,\frac{m}{s}$ Momentane Geschw. nach 10 Sekunden

$s''(25) = -0{,}47\,\frac{m}{s^2}$ Momentane Beschleunigung nach 25 s.

d) $v(t) = -\frac{3}{64}t^2 + \frac{30}{16}t$

$v'(t) = -\frac{6}{64}t + \frac{30}{16}$

$v''(t) = -\frac{6}{64}$

$\rightarrow v'(t) = 0 \Rightarrow t = 20\,s$

$v''(20) = -\frac{6}{64} < 0$ ↗ MAXIMUM!

$v(20) = 18{,}75\,\frac{m}{s}$

Nach 20 sek erreicht das Auto eine maximale Geschwindigkeit von $18{,}75\,\frac{m}{s}$.

12) $s(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + \frac{t}{3}$

$v(t) = s'(t) = -t^2 + 4t + \frac{1}{3}$

$a(t) = s''(t) = -2t + 4$

a) $a(t) = 0$

$-2t + 4 = 0$

$-2t = -4$

$t = 2$

b) $v'(t) = 0 \Leftrightarrow a(t) = 0 \rightsquigarrow t = 2$

$v''(t) = a'(t) = -2$

$\Rightarrow v''(2) = -2 < 0$ MAXIMUM! ✓