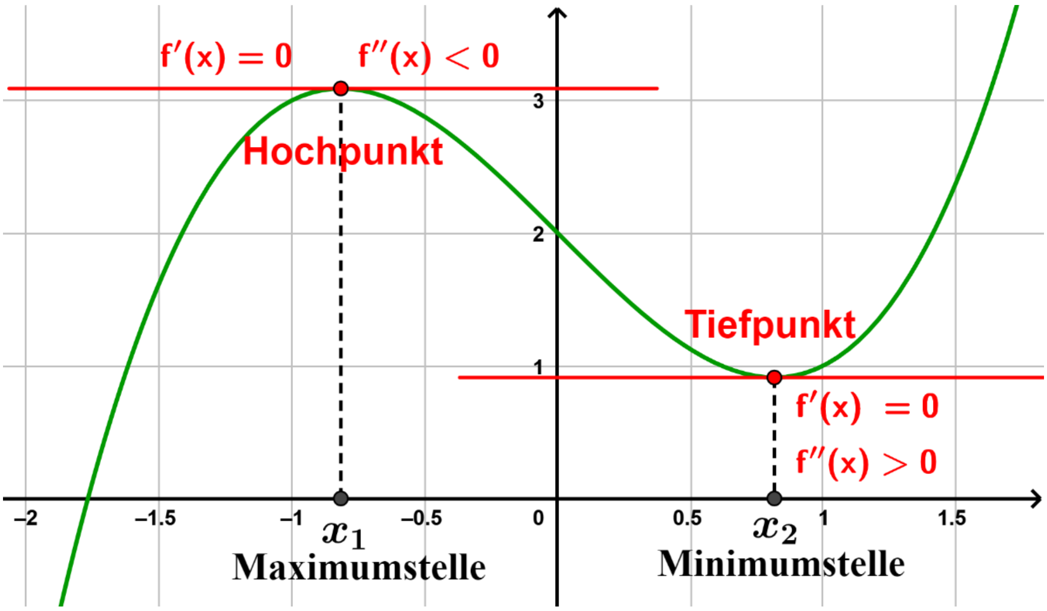
Differentialrechnung

Extremstellen & Wendestellen (inkl. Punkte)

SKRIPT (15 Seiten)

Theoretische Erklärungen und Beispielaufgaben zu **folgenden Themenbereichen**:

- **Theorie: Die Funktion und ihre Ableitungen**
- **Extremstellen, Extrempunkte**
- **Wendestellen, Wendepunkte**
- **Wendetangente**



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

-> **QR-Codes** im SKRIPT!

Prof. Πegischer

Allgemeine Informationen zum Skript

Im Skript werden die zu erlernenden Inhalte stets durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung.

YouTube-Playlist
(PDF-Datei: KLICKEN!)

SCAN MICH

Die **Musterlösungen** sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/differentialrechnung-bestimmung-von-extremstellen-wendestellen-inkl-punkte/

Einsatz des Materials

- Einsatz für **Lehrpersonen** als Aufwertung für den eigenen Unterricht (**Erarbeitung** oder **Festigung** des **Stoffes** anhand des Skriptes, **Einsatz** der **Lernvideos**, „**Flipped Classroom**“, etc.)
- Möglichkeiten für **SchülerInnen**: Selbstständiges Erarbeiten bzw. Festigen eines Stoffgebietes mit dem **Skript** (inkl. Videos & Musterlösungen).
- & noch viele weitere Möglichkeiten!! 😊

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. Alle **Aufgaben** wurden von mir erstellt.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt.
- Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

Differentialrechnung: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen

1. Bedeutung: Die Funktion und ihre Ableitungen

Video 1/6

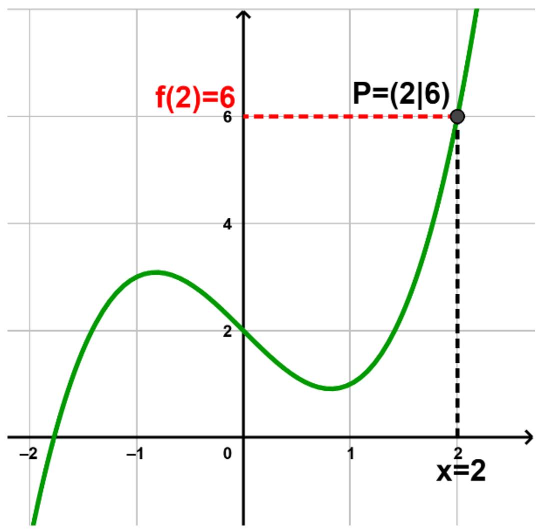
SCAN MICH

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
gibt an ...	den **Funktionswert** an der Stelle x	die **Steigung** von f an der Stelle x	die **Krümmung** von f an der Stelle x
physikalische Interpretation	**Zurückgelegter Weg** in einem Zeit-Ort-Diagramm	momentane Geschwindigkeit	momentane Beschleunigung
$wenn\ > 0$	Funktionswert ist positiv und oberhalb der x-Achse	$f'(x) > 0 \rightarrow$ Funktion ist steigend.	$f''(x) > 0 \rightarrow$ die Funktion ist linksgekrümmt.
$wenn\ < 0$	Funktionswert ist negativ und unterhalb der x-Achse	$f'(x) < 0 \rightarrow$ Funktion ist fallend.	$f''(x) < 0 \rightarrow$ die Funktion ist rechtsgekrümmt.
$wenn\ = 0$	Funktionswert ist 0 -> Nullstellen	Die Funktion ist konstant und besitzt keine Steigung an dieser Stelle.	Die Funktion besitzt keine Krümmung an dieser Stelle.

1. Die Funktion $f(x)$:

$f(x)$ ... gibt den Funktionswert (y-Wert) an der Stelle x an! Man bekommt mit $f(x)$ NUR die fehlende y-Koordinate eines Punktes!

Da man für x jeden Wert des Definitionsbereiches einsetzen kann, gibt es **unendliche viele Punkte**, die dabei entstehen. Und genau aus diesen Punkten entsteht der **Graph**!



Beispiel: $f(x) = x^3 - 2x + 2 \rightarrow f(2) = 6$: An der Stelle $x = 2$ ist der Funktionswert (y-Wert) 6. D.h. die Funktion geht durch den Punkt (2|6).

Wichtige Information (Ableitungen): Die Ableitungen einer Funktion $f(x)$ liefern uns nur **Informationen** über den Verlauf (in Bezug auf **Steigung** und **Krümmung**) der **ursprünglichen (!!!) Funktion $f(x)$.**

2. Die erste Ableitung $f'(x)$:

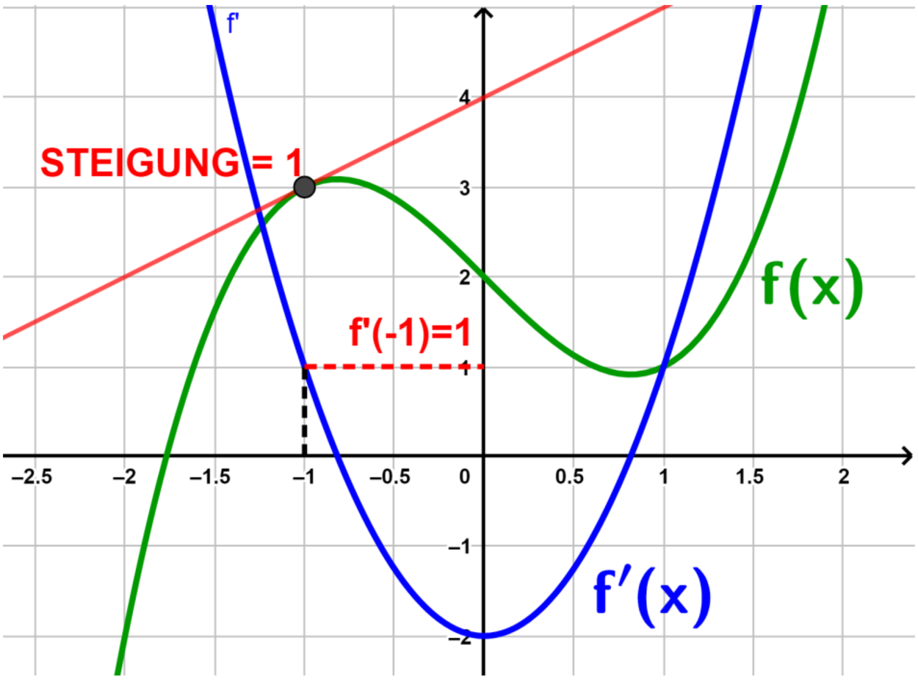
$f'(x)$ … gibt die **Steigung** der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an der Stelle x an!

Geometrisch bedeutet die erste Ableitung die **Steigung der Tangente** im jeweiligen Punkt!

Mit der ersten Ableitung erhalten wir die Steigung **in einem einzigen (!!!) Punkt (an der Stelle x)**, da sich die Steigung stetig ändern kann (Ausnahme: Lineare Funktionen: Steigung ist immer gleich).

Beispiel: $f(x) = x^3 - 2x + 2$ -> $f'(x) = 3x^2 - 2$

Ist z.B. $f'(-1) = 1$, so steigt die Funktion f(x) an der Stelle $x = -1$ im Punkt (-1|3) um der Wert 1. Ist $f'(0) = -2$, dann fällt die Funktion f(x) im Punkt (0|2) um den Wert -2.

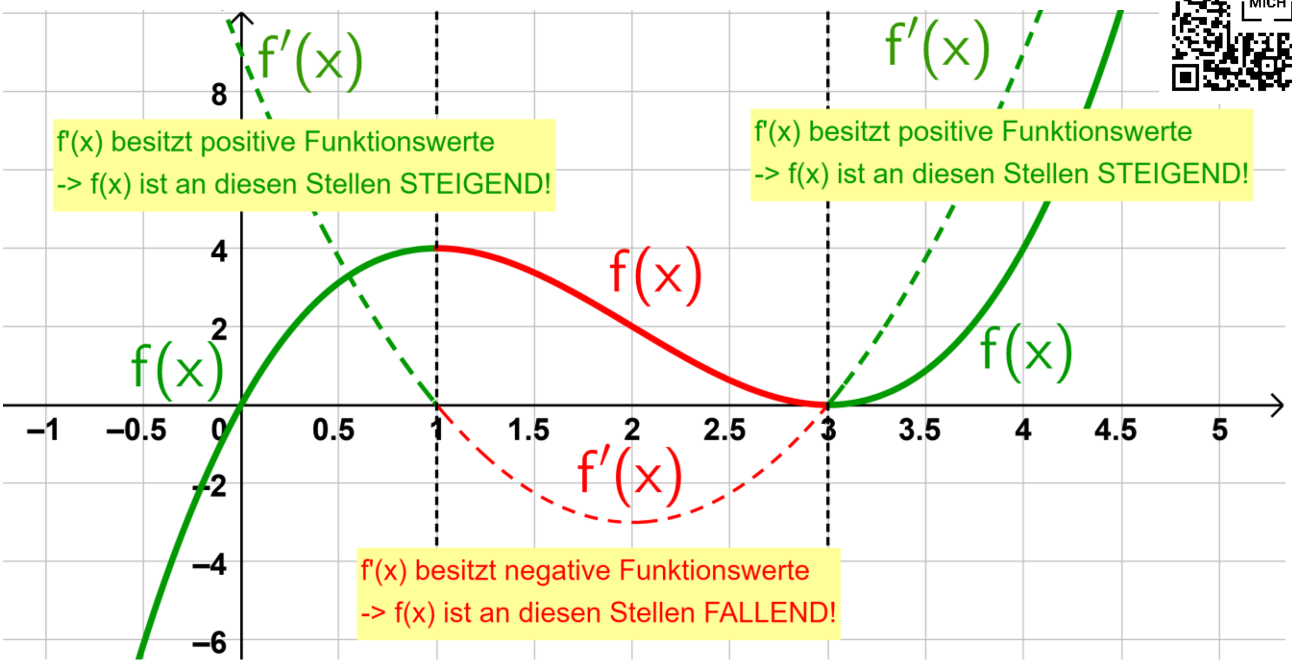


Der Funktionswert der ersten Ableitung f'(x) an der Stelle x gibt die Steigung der ursprünglichen Funktion f(x) an der Stelle x an.

- Ist $\boldsymbol{f'(x) > 0}$: Dann **steigt** die Funktion f(x) an der Stelle x bzw. dem Punkt (x,f(x)).
  Betrachte den blauen Graph von f'(x): Überall, wo dieser Graph positive Funktionswerte besitzt, ist f(x) steigend.
  Im Intervall von $[-1{,}5; 1]$ ist f'(x) zwar fallend (aber noch immer >0), die zugehörige Funktion f(x) aber stets steigend (Steigung nimmt aber tendenziell ab).
- Ist $\boldsymbol{f'(x) = 0}$: Dann ist die Funktion f(x) an der Stelle x $\mathbf{konstant}$ bzw. hat $\boldsymbol{keine\ Steigung}$.
- Ist $\boldsymbol{f'(x) < 0}$: Dann **fällt** die Funktion f(x) an der Stelle x bzw. dem Punkt (x,f(x)).

Zusammenhang Graph: Ursprüngliche Funktion und 1. Ableitung

Video 2/6



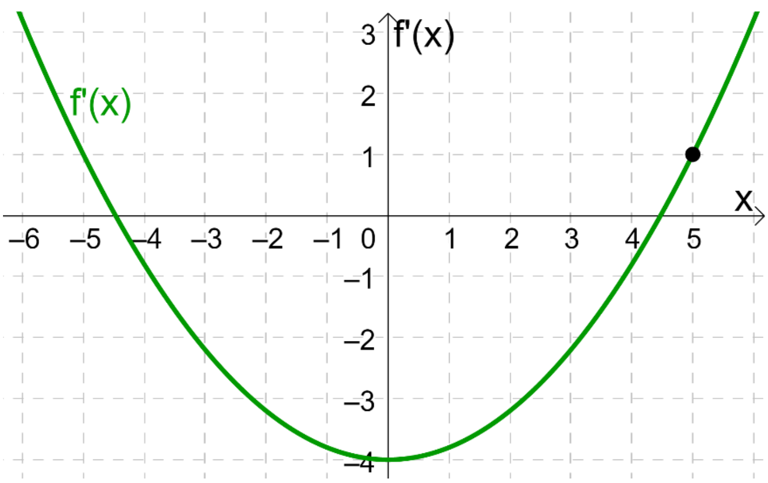
- $(-\infty; 1)$: $f'(x)$ ist zwar fallend, besitzt aber stets positive Funktionswerte. Es gilt in diesem Intervall: $f'(x) > 0$. Dies hat zur Folge, dass die ursprüngliche Funktion $f(x)$ in diesem Intervall steigend ist.

Viele SchülerInnen haben bei dieser Thematik **Vorstellungsprobleme**, warum $f(x)$ steigend ist, obwohl $f'(x)$ fallend ist. Denke immer an folgendes: **Der Funktionswert der ersten Ableitung f'(x) an der Stelle x gibt die Steigung der ursprünglichen Funktion f(x) an der Stelle x an.**
Warum ist $f'(x)$ in diesem Intervall aber fallend?! Welche Auswirkungen hat dies nun, wenn $f'(x)$ fallend ist. Dies hat zur Folge, dass die Steigung der ursprünglichen Funktion von Stelle zu Stelle abnimmt. $f(x)$ steigt in diesem Intervall stets flacher an, bis zur Stelle $x = 1$, an der die Steigung 0 ist (=Hochpunkt).

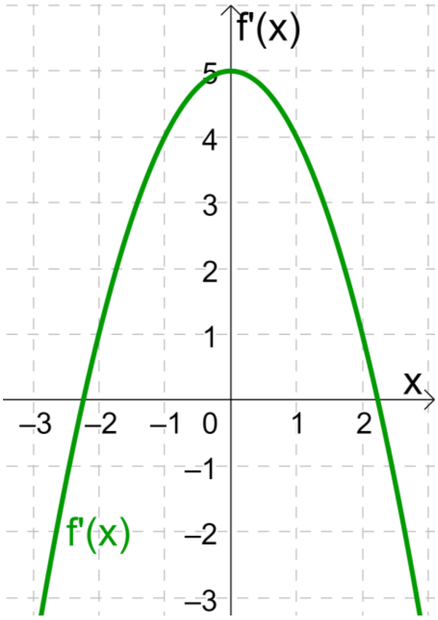
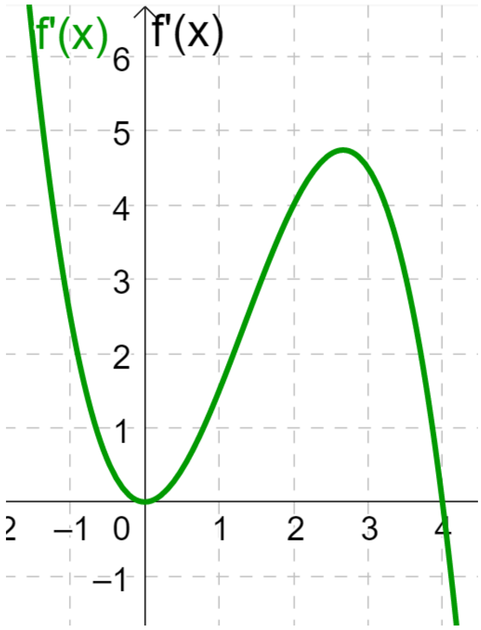
- $(1; 3)$: $f'(x)$ hat durchgehend negative Funktionswerte. Es gilt in diesem Intervall: $f'(x) < 0$. Die ursprüngliche Funktion $f(x)$ ist fallend.

- $(3; +\infty)$: $f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ ist in diesem Intervall steigend.

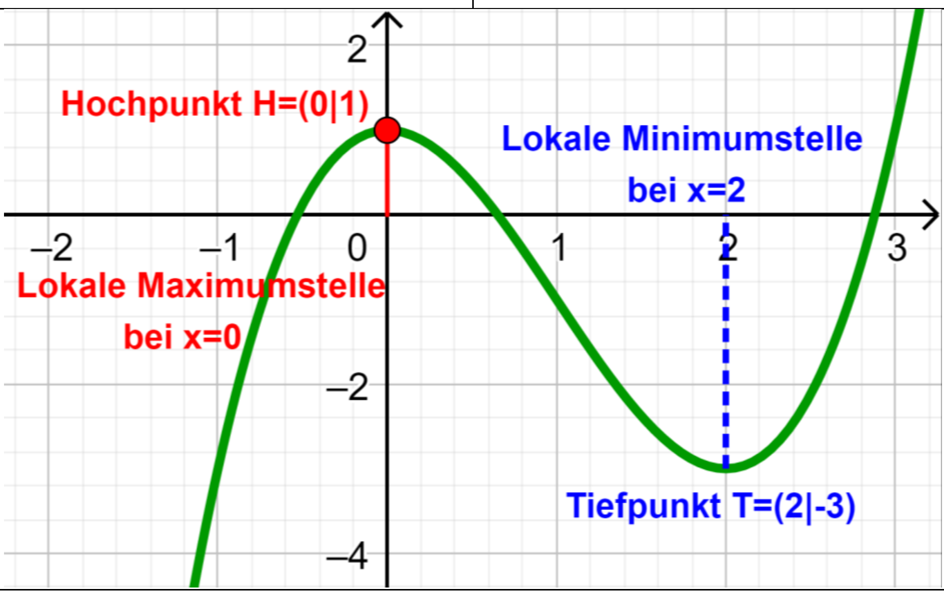
Bsp. 1) Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$. Der Punkt $P = (3|7)$ liegt auf dem Graphen der Funktion f. Bestimme die Gleichung der Tangente der Funktion f durch den Punkt P.



Bsp. 2) Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$. Bestimme die Steigung der ursprüngliche Funktion $f(x)$ an den gesuchten Stellen.

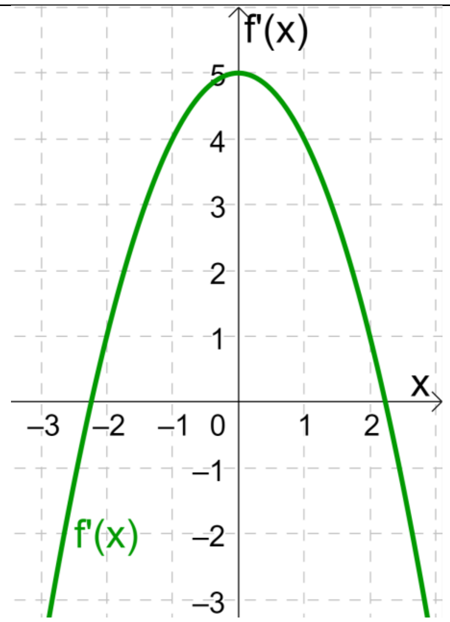
$x_1 = -2\,; x_2 = 0\,; x_3 = 1$	$x_1 = 0\,; x_2 = 2\,; x_3 = 4$
	

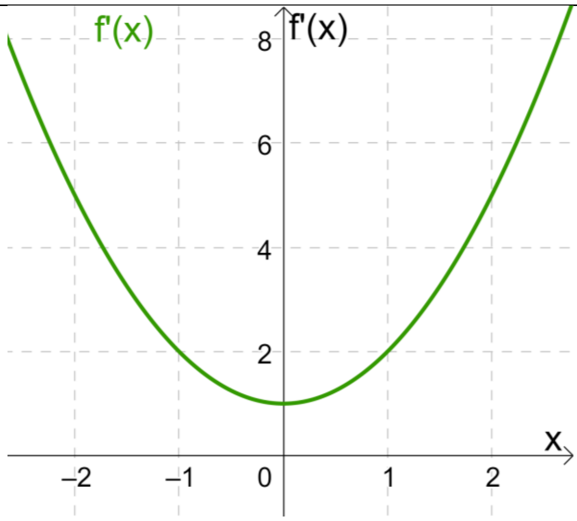
Lokale Extremstellen	
Bei lokalen Extremstellen findet stets ein **Monotoniewechsel** statt!!!	
Lokale Minimumstelle	**Lokale Maximumstelle**
▪ **Monotoniewechsel**: fallend -> steigend ▪ Bemerkung: Die Minimumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Minimum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Tiefpunkt**.	▪ **Monotoniewechsel**: steigend -> fallend ▪ Bemerkung: Die Maximumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Maximum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Hochpunkt**.

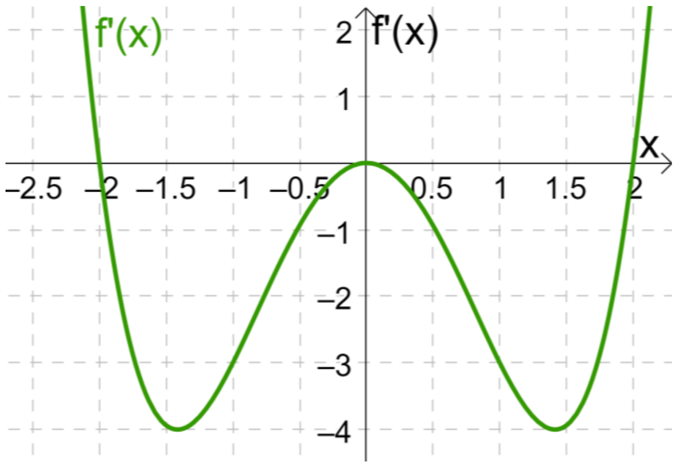


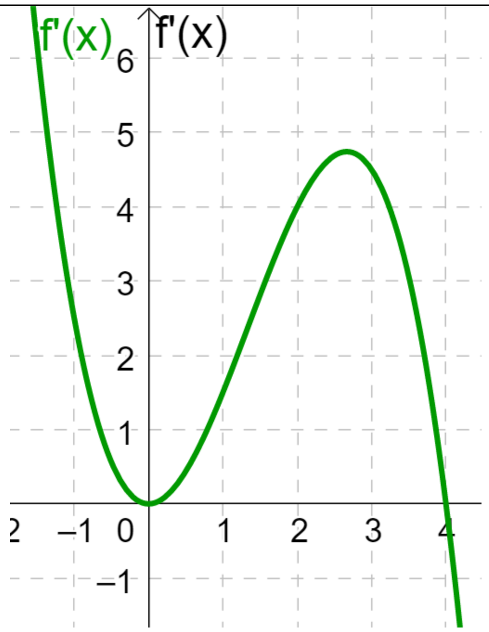
Bsp. 3) Gegeben ist der Graph einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.

- Bestimme die möglichen Extremstellen der Funktion f und gib auch an, welcher Art sie sind.
- Bestimme das Monotonieverhalten der ursprünglichen Funktion $f(x)$.



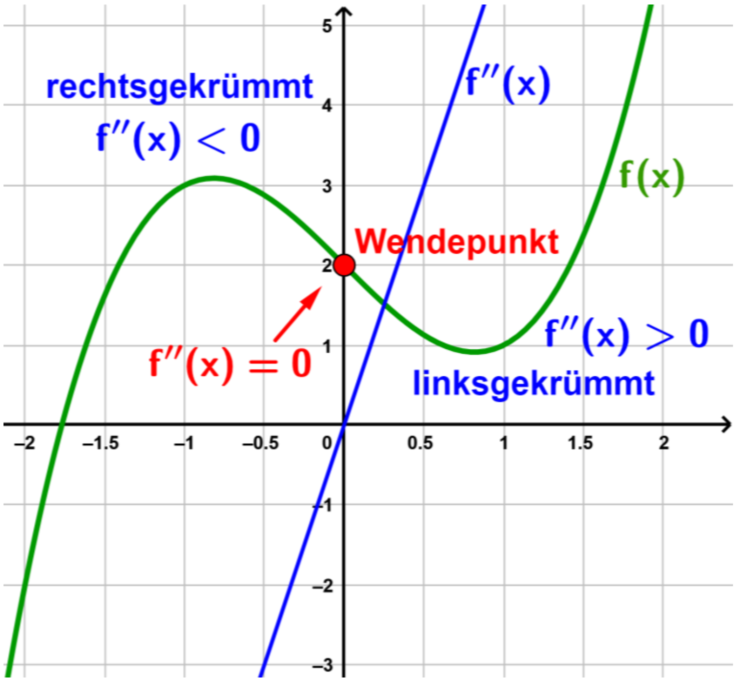






3. Die zweite Ableitung $f''(x)$:

$f''(x)$ ... gibt die Krümmung der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an der Stelle x an.



- Ist $f''(x) > 0$: Die Funktion f(x) ist an der Stelle x linksgekrümmt.
- Ist $f''(x) = 0$: Die Funktion f(x) weist an der Stelle x keine Krümmung auf.
- Ist $f''(x) < 0$: Die Funktion f(x) ist an der Stelle x rechtsgekrümmt.

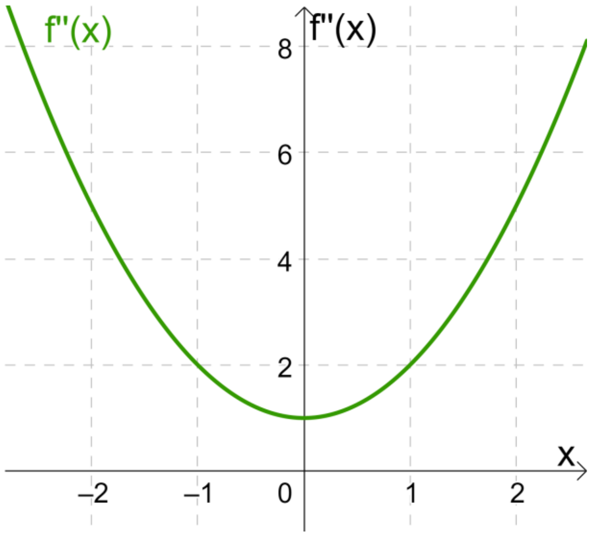
Beispiel: $f''(x) = 6x \rightarrow f''(2) = 12 \rightarrow Die\ Funktion\ f(x)\ ist\ an\ der\ Stelle$
$x = 2\ linksgekrümmt.$

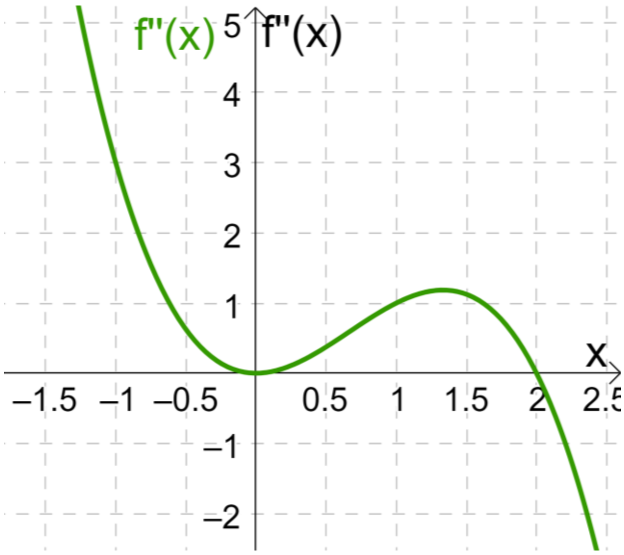
Bsp. 4) Gegeben ist eine Funktion $f(x)$. Gib folgendes an:

(1) Die erste Ableitung f'(x) – Was gibt f'(x) an?
(2) Die zweite Ableitung f''(x) – Was gibt f''(x) an?
(3) Steigung an den Stellen $x_1 = 3\ und\ x_2 = 7$
(4) Krümmung an den Stellen $x_1 = -4\ und\ x_2 = 8$
(5) Funktionswert & Punkt an den Stellen $x_1 = -5\ und\ x_2 = 10$

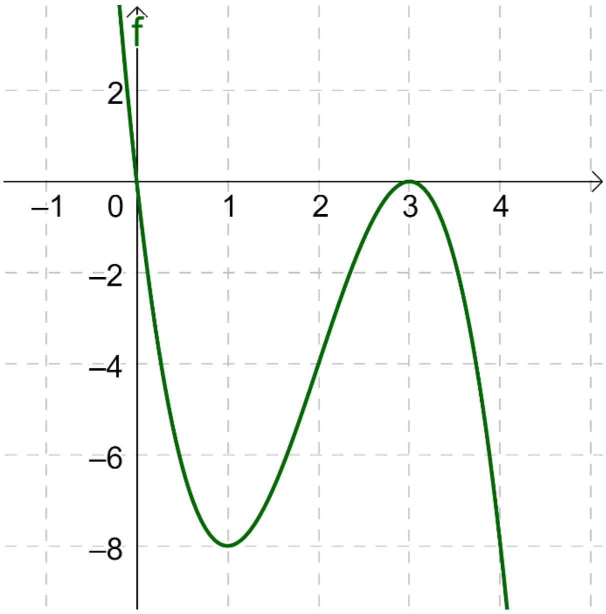
a. $f(x) = x^2 - 5x$	b. $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2$	c. $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 1$

Bsp. 5) Gegeben ist der Graph der zweiten Ableitung $f''(x)$. Gib das Krümmungsverhalten der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an.





Bsp. 6) Gegeben ist der Graph einer Funktion $f(x)$. Kreuze **alle** zutreffende/n Aussagen an.



$f'(0) < 0$	O
$f'(3) = 0$ & $f''(3) < 0$	O
$f''(2) = 0$ & $f'''(2) \neq 0$	O
$f'(1) = 0$ & $f''(1) < 0$	O
$x = 3$ ist eine lokale Maximumstelle	O
$f(1) < 0$	O
$f''(3) > 0$	O
$f(3) = 0$ & $f'(3) = 0$	O
$f(2) > 0$	O
$f'(2{,}5) > 0$	O

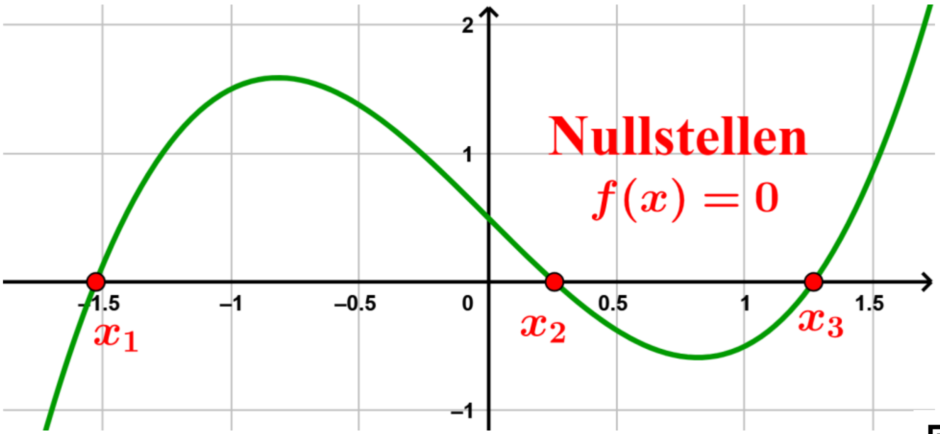
2. Anwendungen von $f(x), f'(x), f''(x)$ *und* $f'''(x)$:

1. Bestimmung der Nullstellen:

Nullstellen sind Stellen, an denen die Funktion die x-Achse schneidet (d.h. an denen der Funktionswert gleich 0 ist!)

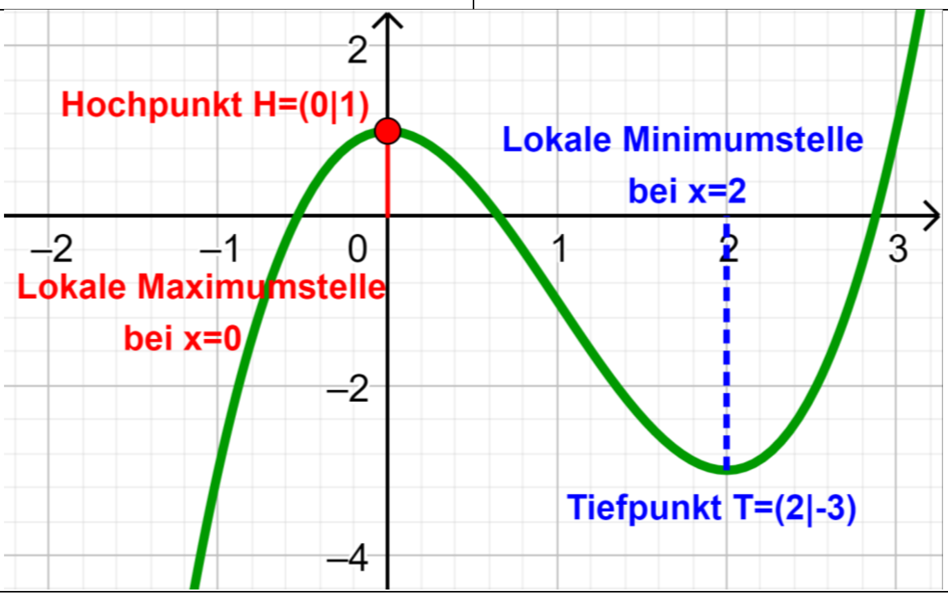
Mathematisch können Nullstellen ermittelt werden, wenn man die Funktion $f(x)$, die die Funktionswerte liefern, 0 setzt.

$$f(x) = 0$$



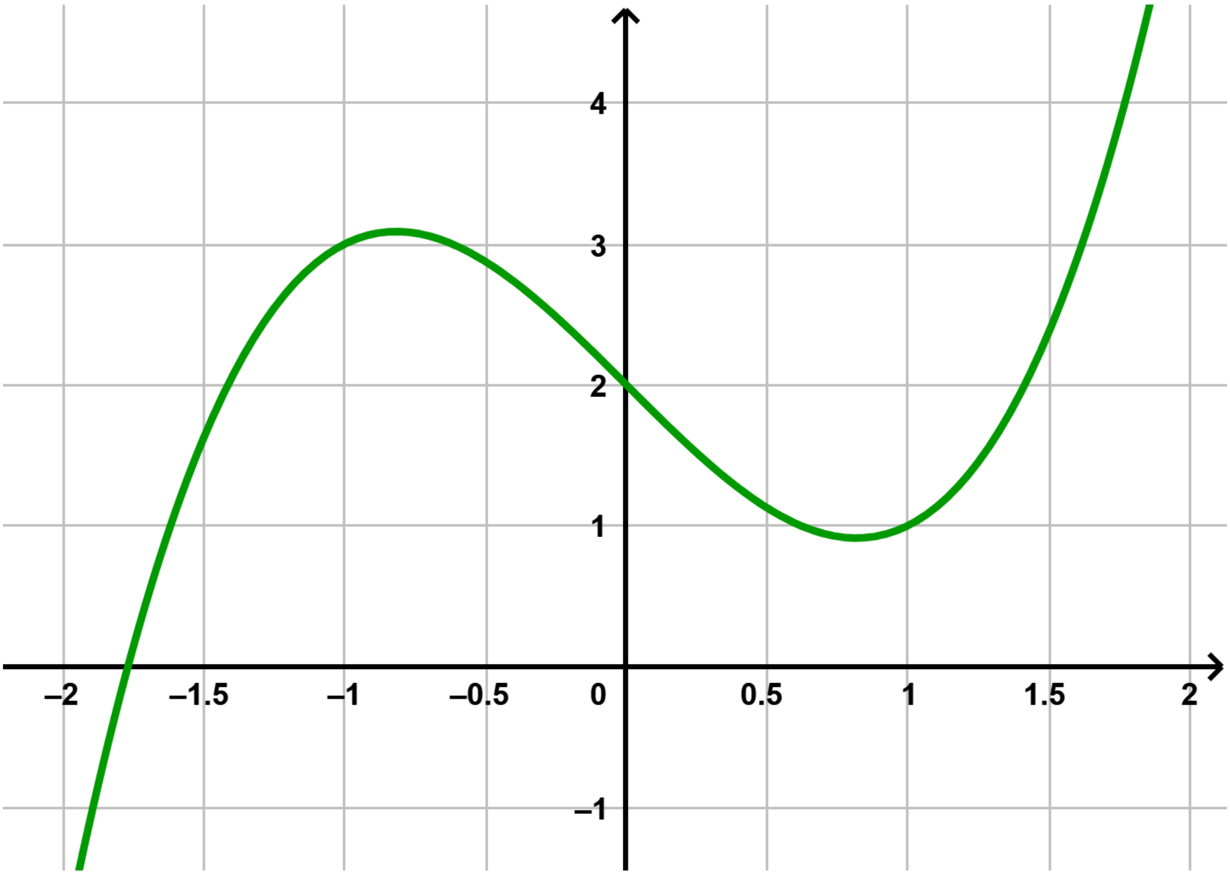
2. Bestimmung der Extremstellen:

Video 3/6

Wiederholung: Lokale Extremstellen	
Bei lokalen Extremstellen findet stets ein **Monotoniewechsel** statt!!!	
Lokale Minimumstelle ▪ **Monotoniewechsel**: fallend -> steigend ▪ Bemerkung: Die Minimumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Minimum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Tiefpunkt**.	**Lokale Maximumstelle** ▪ **Monotoniewechsel**: steigend -> fallend ▪ Bemerkung: Die Maximumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Maximum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Hochpunkt**.
	

Mit der **Differentialrechnung** möchten wir nun **rechnerisch** bestimmen, ob eine Funktion Extremstellen besitzt & um welche es sich dabei handelt.

Frage 1: Wie groß ist Steigung an Extremstellen?
Frage 2: Wie ist der Graph bei einem Hochpunkt bzw. Tiefpunkt gekrümmt?

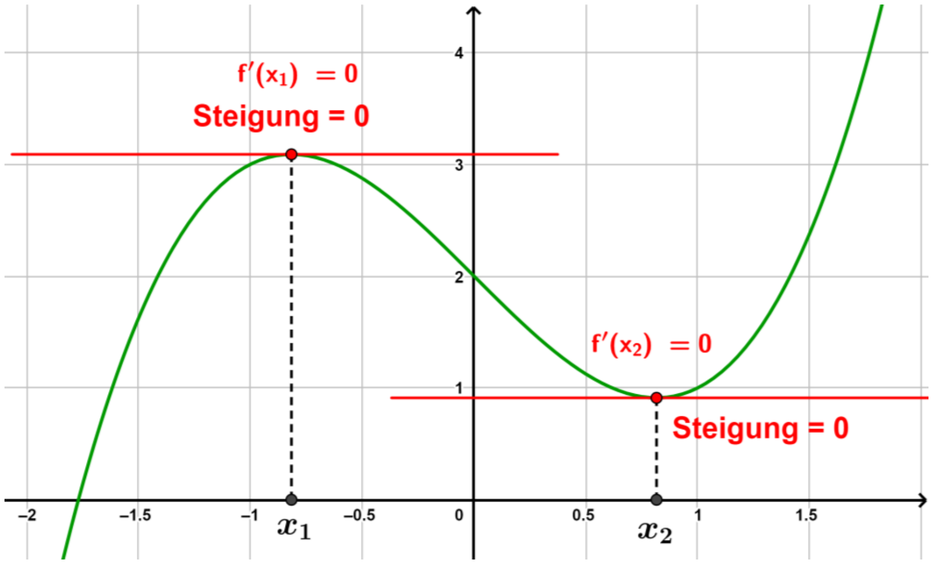


Schritt 1 (Notwendige Bedingung): An Extremstellen gibt es **keine Steigung**, da entweder der maximale, oder der minimale Wert erreicht ist:

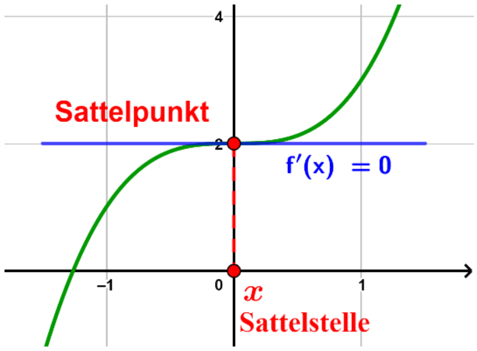
$$f'(x) = 0$$

Mit dieser **Gleichung** erhältst du **alle Stellen** (x-Werte), an denen die **Steigung 0 ist**!

! Nicht mehr, aber auch nicht weniger !



Man kann noch nicht sagen, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt (oder sogar keines von beiden – siehe Ausnahme)!



Ausnahme:

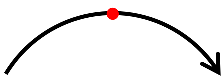
An sogenannten Sattelstellen ist die Steigung der Polynomfunktion 0. Im Gegensatz zu einer Extremstelle ändert sich das Monotonieverhalten nicht (kein Extremum!).

Schritt 2 (Hinreichende Bedingung): Jetzt klären wir, ob es sich um eine **Maximum**-, **Minimum**- oder gar eine **Sattelstelle** handelt. Dafür musst du den Verlauf der Funktion betrachten. An all diesen Stellen ist die Steigung wie gesagt 0!

ABER: welchen Wert nimmt die Krümmung an – Ist die Funktion an dieser Stelle links- oder rechtsgekrümmt, oder herrscht gar keine Krümmung?

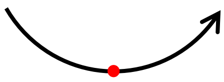
Setze dazu die in – Schritt 1 – erhaltenen x-Werte nun in die 2. Ableitung ein:

➔ Ist die Funktion rechtsgekrümmt ($f''(x) < 0$), kann es sich nur um eine Maximumstelle handeln!



Steigung $= 0 : f'(x) = 0$ Rechtsgekrümmt: $f''(x) < 0$

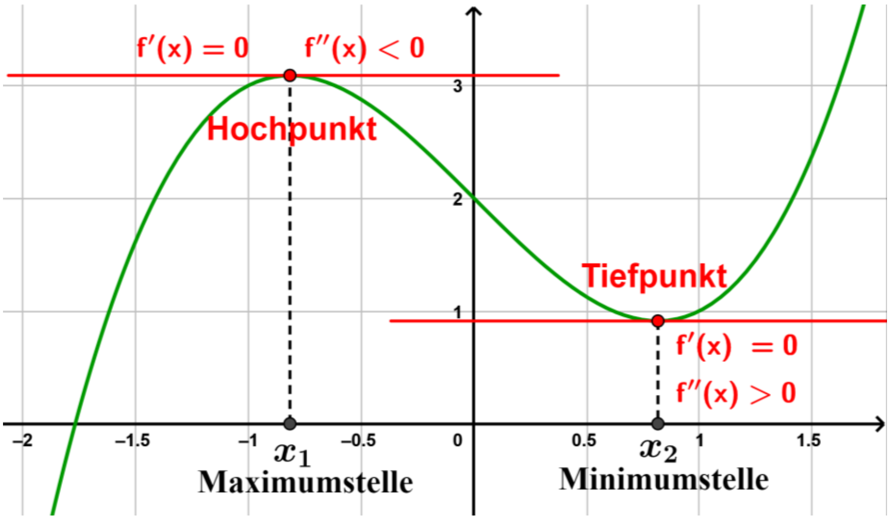
➔ Ist die Funktion linksgekrümmt ($f''(x) > 0$), kann es sich nur um eine Minimumstelle handeln!



Steigung $= 0 : f'(x) = 0$ Linksgekrümmt: $f''(x) > 0$

➔ Herrscht keine Krümmung vor ($f''(x) = 0$), -> Sattelstelle (Achtung: KEINE Extremstelle)

Schritt 3: Mit den Maximum- und Minimumstellen erhält man nur die x-Werte der Extrempunkte. Möchtest du die fehlende y-Koordinate zur Bestimmung des zugehörigen Punktes erhalten (Hoch- und Tiefpunkt), so musst du die x-Werte in die ursprüngliche Funktion f(x) einsetzen!



Schritt 1
$f'(x) = 0$

Schritt 2
erhaltene x-Werte in die zweite Ableitung $f''(x)$ einsetzen
$f''(x) > 0$ *Minimumstelle*
$f''(x) < 0$ *Maximumstelle*
$f''(x) = 0$ *Sattelstelle*

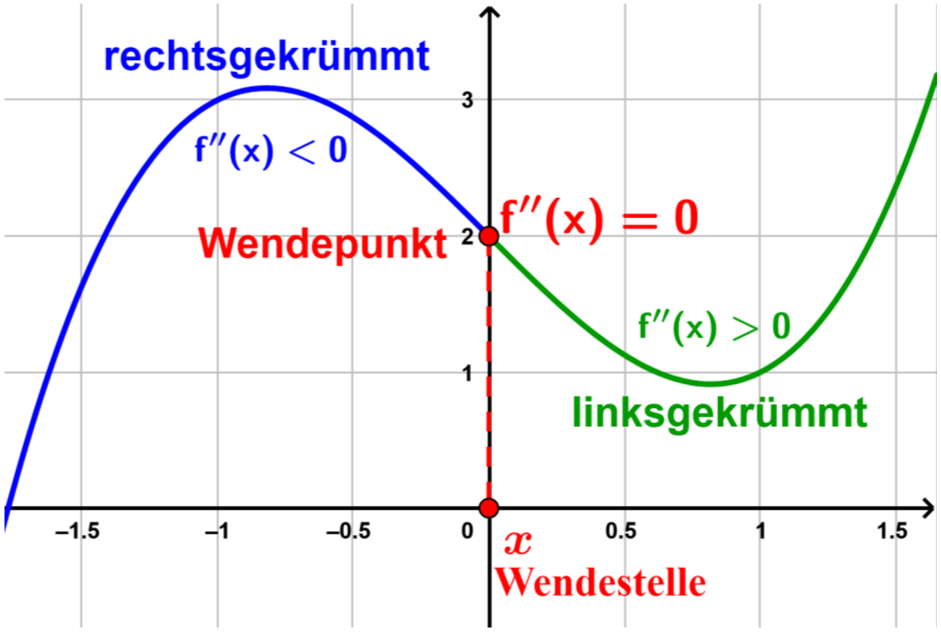
Schritt 3
Hochpunkt/Tiefpunkt
x-Wert in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen
(=zugehörige y-Koordinate)

Bsp. 7) Gegeben ist eine Funktion f. Bestimme mit Hilfe der **<u>Differentialrechnung</u>** (Denk- und Rechenschritte müssen nachvollziehbar sein!) die Extremstellen. Gib nachweislich an, um welche Extremstellen es sich dabei handelt. Welche besonderen Punkte liegen an diesen Stellen? Gib die Koordinaten an.

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$	b. $f(x) = -4x^2 + 10$	c. $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 7$

3. Bestimmung der Wendestellen:

Video 4/6



Schritt 1 (Notwendige Bedingung): An Wendestellen herrscht **keine Krümmung**, d.h.

$$f''(x) = 0$$

Bei Wendestellen ändert sich das Krümmungsverhalten (von linksgekrümmt auf rechtsgekrümmt, bzw. umgekehrt).

Schritt 2 (Hinreichende Bedingung): Um sicher zu gehen, dass es sich um eine Wendestelle handelt, muss folgende Bedingung gelten:

$$f'''(x) \neq 0$$

Schritt 1
$f''(x) = 0$

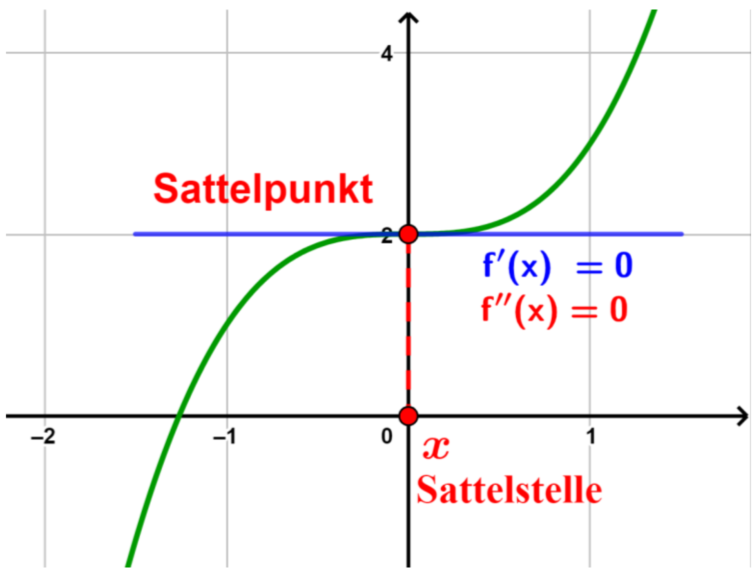
→

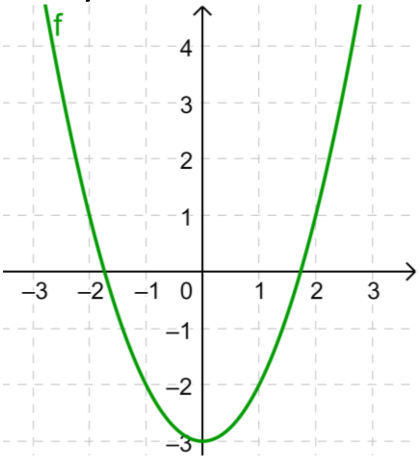
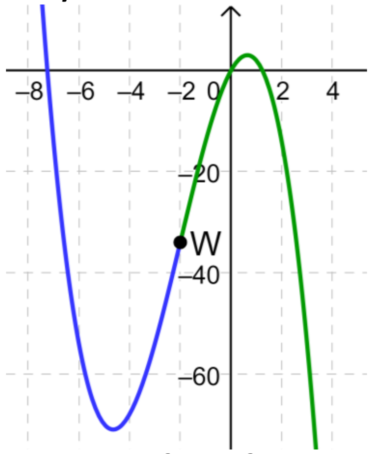
Schritt 2
erhaltenen x-Wert in die dritte Ableitung $f'''(x)$ einsetzen:
$f'''(x) \neq 0 \quad Wendestelle$

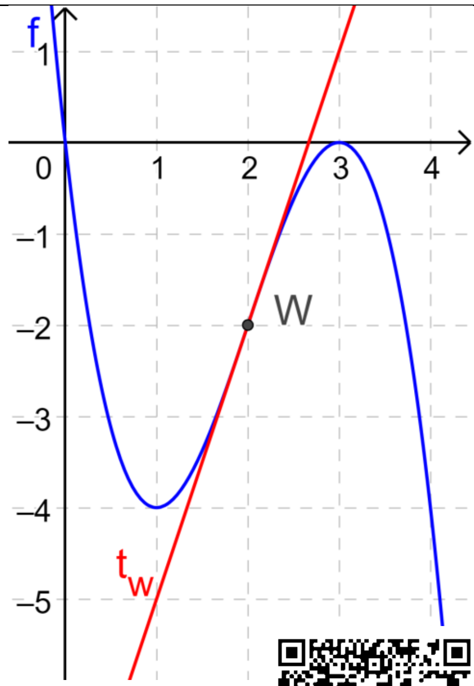
→

Schritt 3
Wendepunkt
x-Wert in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen (=zugehörige y-Koordinate)

Bemerkung: Eine Sattelstelle ist ein Sonderfall einer Wendestelle, da zusätzlich die Steigung 0 ist! Eine Sattelstelle ist aber kein Extremum, da sich das Monotonieverhalten **nicht** ändert!



Kann eine Polynomfunktion 2. Grades einen Wendepunkt besitzen?!	
Polynomfunktion 2. Grades  $f(x) = x^2 - 3$ $f'(x) = 2x$ $f''(x) = 2 \rightarrow f''(x) = 0$ **nicht lösbar!** $f'''(x) = 0$	**Polynomfunktion 3. Grades**  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $f''(x) = 6x - 12$ $f'''(x) = 6$
Eine Polynomfunktion 2. Grades besitzt keinen Wendepunkt (ist für alle Stellen gleich gekrümmt).	Eine Polynomfunktion 3. Grades besitzt stets einen Wendepunkt. Die hinreichende Bedingung $f'''(x) \neq 0$ wird aufgrund des 3. Grades erfüllt.

Bestimmung der Wendetangente		
1] Bestimmung des Wendepunktes $f''(x) = 0 \;\&\; f'''(x) \neq 0$ $W = (x \vert f(x))$ **2]** Wendetangente: $t_w: y = \boldsymbol{k}x + \boldsymbol{d}$ **2.1]** Bestimmung der **Steigung k**: $k = f'(x)$ **2.2]** Bestimmung der **Steigung d**: Wendepunkt in die Funktionsgleichung der Wendetangente einsetzen & umformen.	**Musterbeispiel:** $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$ $f'(x) = -3x^2 + 12x + 9$ $f''(x) = -6x + 12$ $f'''(x) = -6$ $f''(x) = 0 \rightarrow \; x = 2$ $f'''(2) = -6 \;\neq 0$ ✓ $x = 2 \ldots Wendestelle$ $f(2) = -2 \rightarrow \boldsymbol{W} = (\boldsymbol{2} \vert \boldsymbol{-2})$ Wendetangente: $t_w: y = \boldsymbol{k}x + \boldsymbol{d}$ $\boldsymbol{k} = f'(2) = 3$ $t_w: -2 = 3 \cdot 2 + \boldsymbol{d} \quad \vert -6$ $d = -8$ $\boldsymbol{t_w: y = 3x - 8}$	

Video 5/6

Bsp. 8) Gegeben ist eine Funktion f.

a. Bestimme die Nullstellen.
b. Bestimme mit Hilfe der **Differentialrechnung** (Denk- und Rechenschritte müssen nachvollziehbar sein!) die Extremstellen. Gib nachweislich an, um welche Extremstellen es sich dabei handelt. Welche besonderen Punkte liegen an diesen Stellen? Gib die Koordinaten an.
c. Bestimme mit Hilfe der Differentialrechnung (Denk- und Rechenschritte!) die Wendestelle/n bzw. Wendepunkt/e. Gib (falls vorhanden) die Wendetangente/n an.

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	b. $f(x) = x^2 - 4$	c. $f(x) = x^4 - 2x^2$
d. $f(x) = x^3 + 1$	e. $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x$	f. $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 14$

Bsp. 9) Die Funktion $h(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}70x$ beschreibt die Flugbahn eines Fußballs beim Abstoß eines Tormanns.

- x gibt die horizontale Entfernung (in Meter) des Fußballs vom Abschusspunkt an.
- h(x) gibt die Höhe des Fußballs (in Meter) nach x Metern an.

a. Wähle einen passenden Definitionsbereich für dieses Beispiel. Video 6/6

b. Nach wie vielen Metern erreicht der Ball eine Höhe von 10m?

c. In welcher Höhe befindet sich der Fußball bei einer horizontalen Entfernung von 40m?

d. Bestimme mit Hilfe der **Differentialrechnung**, nach wie vielen Metern der Ball seine maximale Höhe erreicht. Zeige nachweislich, dass des sich um ein Maximum handelt.

Bsp. 10) Die Funktion s(t) gibt die zurückgelegte Strecke eines Autos (Einheit: Meter) in Abhängigkeit der Zeit t in Sekunden an. Die Funktion s(t) ist im Intervall $[0; 40]$ definiert. Für die zurückgelegte Strecke gilt

$$s(t) = -\frac{1}{64}t^3 + \frac{15}{16}t^2$$

a. Berechne den Ausdruck $s(30) - s(15)$ und interpretiere dein Ergebnis im gegebenen Kontext.

b. Bestimme die mittlere Geschwindigkeit v_m des Autos im Zeitintervall $[5; 20]$. Verwende passende Einheiten.

c. Bestimme die Werte $s'(10)$ und $s''(25)$ und interpretiere diese mit korrekten Einheiten im Kontext.

d. Bestimme mit Hilfe der Differentialrechnung, wann das Auto die **maximale Geschwindigkeit** erreicht.

Bsp. 11) Ordne den möglichen Eigenschaften einer Funktion f die entsprechende formale Aussage zu!

Aufgabenstellung:

f hat an der Stelle x eine Minimumstelle	
f hat an der Stelle x eine Nullstelle	
f besitzt an der Stelle x eine Sattelstelle	
f hat an der Stelle x die Steigung 2	

A	$f'(x) = 0 \,\&\, f''(x) < 0$
B	$f'(x) = 0 \,\&\, f''(x) = 0$
C	$f(x) = 0$
D	$f'(x) = 0 \,\&\, f''(x) > 0$
E	$f'(x) = 2$
F	$f'(2) = 2$

Bsp. 12) Der zurückgelegte Weg eines Autos kann näherungsweise durch die Funktion s(t) beschrieben werden:

$$s(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + \frac{t}{3} \quad mit\ 0 \leq t \leq 3$$

- t … Zeit in Minuten
- s(t) … zurückgelegter Weg zur Zeit t in Kilometer

a. Berechne, nach welcher Zeit t_0 die Beschleunigung im angegebenen Intervall 0 ist.
b. Zeige nachweislich, dass die Geschwindigkeit zu dieser Zeit t_0 maximal ist.

Bsp. 13) Bestimme die Wendestelle/n der gegebenen Funktion. Was fällt dir auf?!

$f(x) = x^4$	$f(x) = x^5$

Bemerkung:

Ist die 3. Ableitung an der **Wendestelle** Null – $f'''(x) = 0$ – so musst du die Funktion weiter differenzieren (=ableiten), bis eine **Ableitung ungleich Null** ist.

- Ist diese Ableitung ungerader Ordnung, also die 5., 7., 9. Ableitung, dann hast du dort einen Wendepunkt.
  Bsp.: Die Funktion $f(x) = x^7$ besitzt an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt.

- Ist diese Ableitung gerader Ordnung, also die 4., 6., 8. Ableitung, dann handelt es sich um einen Extrempunkt an dieser Stelle (Hoch- bzw. Tiefpunkt).
  Bsp.: Die Funktion $f(x) = x^6$ besitzt an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt.

Bsp. 14) Bestimme mögliche Extrem- bzw. Wendestellen der gegebenen Funktionen.

$f(x) = -2x^5$	$f(x) = 0{,}1x^6$