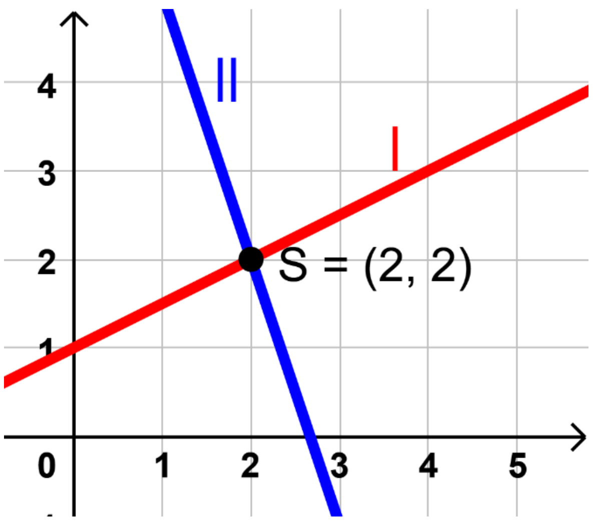
Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

SKRIPT (7 Seiten)

Theoretische Erklärungen und Beispielaufgaben zu **folgenden Themengebieten**:

- **Lineare Gleichungen in zwei Variablen**
- **Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen**
  - **Additionsverfahren, Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren**
  - **Graphisches Verfahren**
- **Lösungsfälle eines lineare Gleichungssystems**



$$\text{I}: \ 2x + 3y = 6$$

$$\text{II}: \ x - y = -7$$

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

-> **QR-Codes** im SKRIPT!

Prof. Tegischer

Allgemeine Informationen zum Skript

Im Skript werden die zu erlernenden Inhalte stets durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung.

YouTube-Playlist
(PDF-Datei: KLICKEN!)

SCAN MICH

Die **Musterlösungen** findest du (sofern bereits verfügbar) kostenlos auf meiner Homepage unter folgendem Link: https://prof-tegischer.com/05-lineare-gleichungssysteme/

Einsatz des Materials

- Einsatz für **Lehrpersonen** als Aufwertung für den eigenen Unterricht (**Erarbeitung** oder **Festigung** des **Stoffes** anhand des Skriptes, **Einsatz** der **Lernvideos**, „**Flipped Classroom**", etc.)
- Möglichkeiten für **SchülerInnen**: Selbstständiges Erarbeiten bzw. Festigen eines Stoffgebietes mit dem **Skript** (inkl. Videos & Musterlösungen).
- & noch viele weitere Möglichkeiten!! 😊

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. Alle **Aufgaben** wurden von mir erstellt.
- Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.
- Die Graphiken wurden mit „**GeoGebra**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme in zwei Variablen

SCAN ME

Video 1/9

1. Lineare Gleichungen in zwei Variablen

Eine Gleichung der Form

$$a \cdot x + b \cdot y = c \quad mit\ a, b, c \in \mathbb{R};\ a, b \neq 0$$

wird **lineare Gleichung** in **zwei Variablen** genannt.

Jedes Zahlenpaar $(x|y)$, das diese Gleichung erfüllt, ist eine Lösung dieser Gleichung.

Bsp. 1) Gib **drei** verschiedene Lösungen zu folgender Gleichung an:

$$\mathbf{2x - 4y = 8}$$

$L_1 =$ $\qquad$ $L_2 =$ $\qquad$ $L_3 =$

Bsp. 2) Bei einer Feier gibt es x Tische mit fünf Plätzen und y Tische mit acht Plätze. Bei der Feier sind insgesamt 200 Personen geladen. Stelle den Sachverhalt durch eine **lineare Gleichung** in **zwei Variablen** dar.

Gib <u>3 Möglichkeiten</u> an, auf wie vielen Tischen (fünf Plätze bzw. acht Plätze) die geladenen Gäste aufgeteilt werden können.

Eine lineare Gleichung in zwei Variablen kann in zwei Formen angegeben werden:

- **allgemeine Form:** $a \cdot x + b \cdot y = c \qquad z.B. \quad 6x + 2y = 13$
- **Hauptform:** $y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{b} \quad (b \neq 0) \qquad z.B. \quad y = -3x + \frac{13}{2}$

<u>Beweis</u>: Forme die allgemeine Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ auf $\boldsymbol{y} =$ um.

Bsp. 3) Wandle die Gleichung in die **Hauptform** um. Ist es möglich? Begründe deine Antwort.

a. $3x + 9y = 27$	**b.** $10x = 15$	**c.** $\frac{4}{8}x + \frac{3}{4}y = 8$	**d.** $0{,}3y = 9$

Bsp. 4) Haben folgende Gleichungen dieselbe Lösungsmenge? Begründe deine Antwort.

$$-6x + 18y = 2 \qquad x = 3y - \frac{1}{3} \qquad 18x - 36y = -4$$

2. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Fasst man zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen zusammen, so erhält man ein so genanntes **lineares Gleichungssystem** in zwei Variablen.

$$|: \; a \cdot x + b \cdot y = c$$
$$||: \; d \cdot x + e \cdot y = f \qquad (a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R})$$

Die Lösung des Gleichungssystems sind alle Zahlenpaare $(x|y)$, die beide Gleichungen erfüllen.

Video 2/9

Mit folgenden Verfahren können lineare Gleichungssysteme gelöst werden:

2.1 Einsetzungsverfahren (Substitutionsmethode)

In einer Gleichung wird eine Variable ausgedrückt. Dieser Term ersetzt die Variable in der anderen Gleichung.

$|: \; x + 3y = 10$ $||: \; 2x + 5y = 24$	
1) Eine Gleichung nach **einer Variablen (x oder y)** auflösen. *In diesem Beispiel lösen wir die 1. Gleichung nach x auf.*	$|: \; x + 3y = 10 \Leftrightarrow \; \boldsymbol{x = 10 - 3y}$
2) Den Term für diese Variable in die **andere Gleichung** einsetzen. *D.h. wir setzen $x = 10 - 3y$ in die 2. Gleichung statt dem x ein.*	$||: \; 2 \cdot (\boldsymbol{10 - 3y}) + 5y = 24$
Das Schwierigste ist geschafft! Ab jetzt entspricht es dem Lösen einer linearen Gleichung in ***1 Variablen****.*	
3) Die Gleichung nach der enthaltenen Variablen **auflösen**.	$||: 20 - 6y + 5y = 24 \Leftrightarrow$ $||: \; -y = 4 \; \Leftrightarrow$ $||: \; y = -4$
4) Die **Lösung** in die **umgeformte Gleichung** aus Schritt 1 einsetzen und so die zweite Variable berechnen. *Wir setzen $y = -4$ in $x = 10 - 3y$ ein.*	$x = 10 - 3 \cdot (-4) \;\; \Leftrightarrow \; \boldsymbol{x = 22}$
5) Mache die **Probe**. WICHTIG: Verwende immer die Gleichung, die du im Schritt 4 NICHT benutzt hast!	$in\,||: \; 2 \cdot 22 + 5 \cdot (-4) = 24$ $44 - 20 = 4$ $4 = 4 \;\; w.A.$
6) Die Lösung besteht aus dem Zahlenpaar (x|y).	$x = 22, y = -4 \qquad L = \{(22|-4)\}$

Bsp. 5) Löse mithilfe des Einsetzungsverfahrens:

$|: \; 4x - 2y = 6$ $||: \; 2x + 2y = 18$	$|: \; 3x + 2y = 10$ $||: \; x - 3 = -y$

Video 3/9

2.2 ADDITIONSVERFAHREN (ELIMINATIONSMETHODE)

Es wird mit geeigneten Zahlen so multipliziert, dass bei der anschließenden Addition der beiden Gleichungen eine Variable wegfällt.

$\mid: \ 6x + 7y = 29$ $\mid\mid: \ 3x - 5y = 6$	Video 4/9
1) Entscheide, welche Variable (x oder y) du eliminieren willst und überlege, was du tun musst, damit die Variable wegfällt. **Bemerkung 1**: *In diesem Fall wird die zweite Gleichung mit (-2) multipliziert, sodass bei der Addition der Gleichungen, die x-Variable eliminiert wird.* **Bemerkung 2:** *Es kann vorkommen, dass du auch beide Gleichungen mit einer Zahl einmultiplizieren musst!* **2)** Addiere nun die erste mit der zweiten Gleichung, sodass eine Variable wegfällt.	$\mid: 6x + 7y = 29$ $\mid\mid: 3x - 5y = 6 \quad \mid \cdot (-2)$ $\mid: \ 6x + 7y = 29$ $\mid\mid: -6x + 10y = -12$ $17y = 17$
3) Löse die erhaltene Gleichung auf.	$17y = 17 \quad \mid : 17$ $\boldsymbol{y = 1}$
4) Setze die berechnete Variable in eine der angegebenen Gleichungen ein, um die zweite Variable berechnen zu können.	$\mid: \ 6x + 7 \cdot 1 = 29 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = \frac{11}{3}}$
5) Mache die **Probe**. WICHTIG: Verwende immer die Gleichung, die du im Schritt 4 NICHT benutzt hast!	$in \ \mid\mid: \ 3 \cdot \frac{11}{3} - 5 \cdot 1 = 6$ $11 - 5 = 6$ $6 = 6 \ w.A.$
6) Die Lösung besteht aus dem Zahlenpaar (x|y).	$x = \frac{11}{3}, y = 1 \qquad L = \left\{\left(\frac{11}{3} \middle\| 1\right)\right\}$

Bsp. 6) Löse mithilfe des Additionsverfahrens:

$\mid: \ 16x + 5y = 11$ $\mid\mid: \ 6x - 4y = 10$	$\mid: \ 4x + 7y = 8$ $\mid\mid: -8x + 3y = 52$

TIPP - So funktioniert es immer: *Multipliziere die 1. Gleichung mit dem x-Koeffizienten (oder y) der 2. Gleichung und die 2. Gleichung mit dem negativen x-Koeffizienten (oder y) der 1. Gleichung.*

2.3 Gleichsetzungsverfahren (Komparationsmethode)

Aus beiden Gleichungen wird dieselbe Variable ausgedrückt und die Terme werden gleichgesetzt.

Video 5/9

$$|:\ x + y = 3$$
$$||:\ x - 20y = -18$$

1) Löse beide Gleichungen nach der gleichen Variable (x oder y) auf. **Bemerkung**: *In diesem Beispiel werden die Gleichungen auf x= umgeformt.*	$\|: x = 3 - y$ $\|\|: x = 20y - 18$
2) Setze die Gleichungen gleich $(x = x)$. Es entsteht wieder eine lineare Gleichung in 1 Variable.	$\boldsymbol{x = x}$ $3 - y = 20y - 18$
3) Löse die Gleichung nach der gegebenen Variable auf.	$21 \cdot y = 21 \iff \boldsymbol{y = 1}$
4) Setze die Lösung in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 ein, um die andere Variable zu erhalten.	$x = 3 - 1 \iff \boldsymbol{x = 2}$
5) Mache die **Probe**. WICHTIG: Verwende immer die Gleichung, die du im Schritt 4 NICHT benutzt hast!	$in\ \|\|:\ 2 = 20 \cdot 1 - 18$ $2 = 2\ \ w.A.$
6) Die Lösung besteht aus dem Zahlenpaar (x|y).	$x = 2, y = 1 \qquad L = \{(2\|1)\}$

Bsp. 7) Löse mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens:

$\|:\ 3x + y = 5$ $\|\|:\ 7x - y = 5$	$\|:\ 10x - 4y = 6$ $\|\|:\ 10x - 6y = -6$

Bsp. 8) Löse <u>intelligent</u> mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens. Was kannst du gleich setzen?

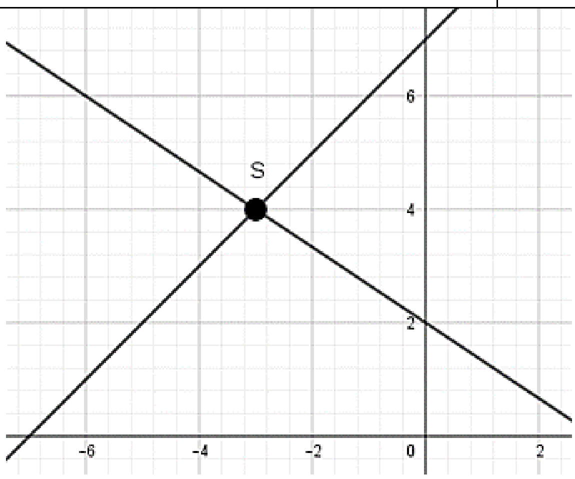
$$|:\ 3x + 2y = 0$$
$$||:\ 3x - y = 9$$

2.4 Graphisches Lösungsverfahren

Video 6/9

$$\text{I}:\ 2x + 3y = 6$$
$$\text{II}:\ x - y = -7$$

1) Forme beide Gleichungen auf die Form $y = k \cdot x + d$ um und zeichne die beiden Graphen	I: $y = -\frac{2}{3}x + 2$ II: $y = x + 7$



2) Ermittle die **Lösungsmenge**: a. 1 Lösung: Es gibt einen Schnittpunkt b. Unendlich viele Lösungen: Die beiden Geraden sind ident. c. Keine Lösung: Die Geraden verlaufen parallel.	$S = (-3\|4)$ $x = -3 \quad \& \quad y = 4$

Bsp. 9) Löse das Gleichungssystem graphisch.

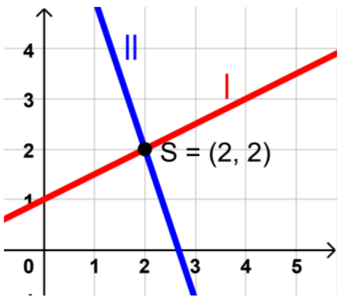
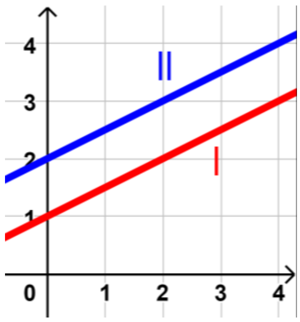
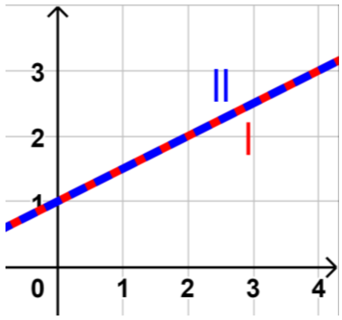
$$\text{I}:\ 5x - 3y = 2$$
$$\text{II}:\ 2x + 3y = 5$$

3. Lösungsmöglichkeiten eines linearen Gleichungssystems

Die Lösungen eines linearen Gleichungssystem sind alle Zahlenpaare $(x|y)$, die beide Gleichungen erfüllen.

- **Eine** Lösung: 1 Zahlenpaar
- **Keine** Lösung: kein einziges Zahlenpaar
- **Unendlich** viele Lösungen: unendlich viele Zahlenpaare

Video 7/9

	1. Fall genau 1 Lösung	**2. Fall** keine Lösung	**3. Fall** unendlich viele Lösungen
Beispiel:	$I: y = 0{,}5x + 1$ $II: y + 3x = 8$ Lineare unabhängige Gleichungen	$I: 2y - x = 2$ $II: 2y - x = 4$ widersprüchlich	$I: 2y - x = 2$ $II: 4y - 2x = 4$ I ist ein Vielfaches von II (linear abhängig)
Einsetzungs-, Additions- und Gleichsetzungsverfahren	$x = 2$ und $y = 2$	Falsche Aussage wie z.B. $0 = 2$	Eine wahre Aussage wie z.B. $0 = 0$
Graphisches Verfahren:			
Lösungen:	Genau eine Lösung: $x = 2$ und $y = 2$	Keine Lösung	Unendlich, viele Lösungen z.B. $(0|1); (2|2); (4|3); \ldots$
Lösungsmenge:	$L = \{(2|2)\}$	$L = \{\,\}$	$L = \{(x|y)|2y - x = 2\}$

Vorgehensweise – Lösungsfälle bestimmen

1. Fall (1 Lösung): Die Variablen **x** und **y** sind keine Vielfachen voneinander. D.h. egal mit welchen Zahlen die Gleichungen ein-multipliziert werden, die Variablen x und y sind in beiden Gleichungen immer verschieden.

2. Fall (Keine Lösung): Die Variablen **x** und **y** müssen bei beiden Gleichungen entweder ident oder Vielfache voneinander sein. Wichtig ist, dass die Lösungszahlen bei den Gleichungen keine Vielfache sind!

3. Fall (Unendlich Viele Lösungen): Die beiden Gleichungen sind Vielfache voneinander. Der Unterschied zum 2.Fall ist, dass nun auch die Lösungszahlen auch übereinstimmen müssen!

Video 8/9

Bsp. 10) Wie viele Lösungen treten bei folgenden Gleichungssystemen auf? (Du brauchst die Lösungsfälle nicht berechnen!)

$|: 2x + 3y = 7$ $||: 3x + 6y = 9$	$|: 2x + 3y = 7$ $||: 4x + 6y = 14$	$|: 6x + 12y = 7$ $||: 3x + 6y = 3$
$|: -3x - 2y = -9$ $||: 3x + 2y = 9$	$|: -4x - 5y = 3$ $||: -8x + 10y = 2$	$|: -4x - 3y = 7$ $||: -8x - 6y = 14$

Bsp. 11) Vervollständige so, dass der gewünschte Lösungsfall eintritt. Gib an, welche Bedingungen für die gegebenen Variablen gelten müssen.

1 Lösung	Keine Lösung	Unendlich viele Lösungen
$\text{I}: 2x + 3y = 7$ $\text{II}: 6x + cy = 9$	$\text{I}: x - 2y = 3$ $\text{II}: -3x + 6y = d$	$\text{I}: x + 2y = 7$ $\text{II}: 4x + 8y = d$
$\text{I}: 3x + cy = 2$ $\text{II}: -12x + 3y = d$	$\text{I}: 4x + 5y = 3$ $\text{II}: cx - 20y = d$	$\text{I}: 7x + cy = 19$ $\text{II}: -14x + 4y = d$
$\text{I}: cx - 10y = -10$ $\text{II}: 3x - 2y = d$	$\text{I}: cx - 8y = 16$ $\text{II}: 4x + 2y = d$	$\text{I}: cx - 6y = 12$ $\text{II}: 4x + y = d$
$\text{I}: 2x + cy = -1$ $\text{II}: 10x + 5y = d$	$\text{I}: -13x + cy = d$ $\text{II}: x - 2y = -3$	$\text{I}: -12x + 18y = 60$ $\text{II}: 2x + cy = d$

SCAN MICH

Video 9/9

Bsp. 12) Welches Lösungsverfahren bietet sich am besten an? Löse das Gleichungssystem und gib die Lösungsmenge an.

Verfahren:	Verfahren:	Verfahren:
$\text{I}: 4x + 6y = 14$ $\text{II}: -3x + 5y = -1$	$\text{I}: 6x - 2y = -2$ $\text{II}: y = -3x - 1$	$\text{I}: -7x - y = -12$ $\text{II}: -7x = 8 - 3y$
$L =$	$L =$	$L =$