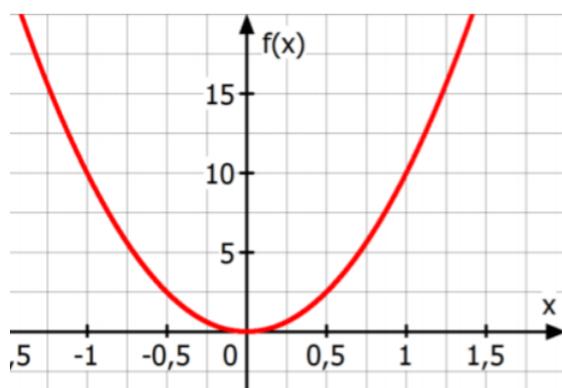
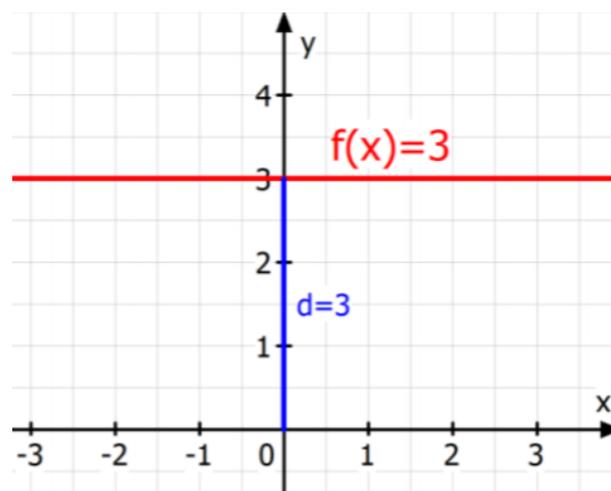
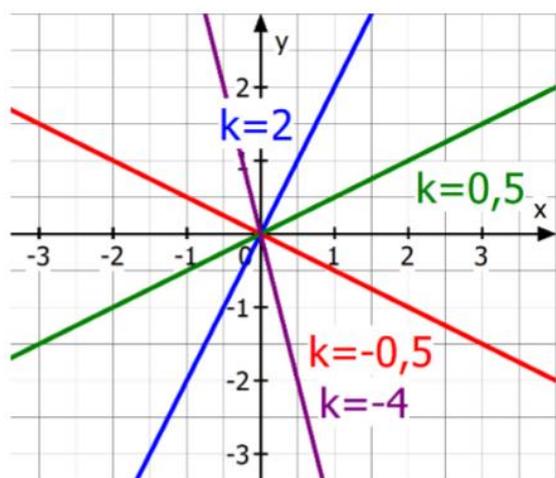


# Funktionen – Grundlagen

## SKRIPT (15 Seiten)

Theoretische Erklärungen und Beispielaufgaben zu **folgenden Themenbereichen:**

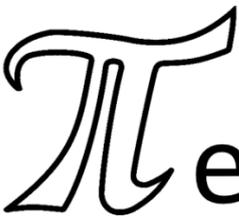
- Definition einer Funktion
- Darstellung einer Funktion
- Funktionstypen
- Zeichnen eines Funktionsgraphen mit Hilfe der Wertetabelle
- Bezeichnungen bei Funktionen
- Punkte auf einem Funktionsgraphen
- Interpretieren der Funktionssprache
- Berechnungen mit einer Funktionsgleichung



### Zusätzlich:

**Erklärvideos** (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

-> **QR-Codes** im SKRIPT!

Prof.  egischer

## Allgemeine Informationen zum Skript

### Anwendung des Materials:

Im Skript werden die zu erlernenden Inhalte stets durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** gelöst werden, um das Erlernete zu festigen.

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung.

[YouTube-Playlist](#)  
(PDF-Datei: **KLICKEN!**)



Die **Musterlösungen** findest du (sofern bereits verfügbar) kostenlos auf meiner Homepage unter folgendem Link: <https://prof-tegischer.com/06-funktionen-grundlagen/>

### Einsatz des Materials

- Einsatz für **Lehrpersonen** als Aufwertung für den eigenen Unterricht („**Flipped Classroom**“, **Erarbeitung** oder **Festigung** des **Stoffes** anhand des Skriptes, **Einsatz** der **Lernvideos**, etc.)
- Möglichkeiten für **SchülerInnen**: Selbstständiges Erarbeiten bzw. Festigen eines Stoffgebietes mit dem **Skript** (inkl. Videos & Musterlösungen).
- & noch viele weitere Möglichkeiten – wenn du eine besondere Idee hast, lass es mich wissen!! 😊

### Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. Alle **Aufgaben** wurden von mir erstellt.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt.
- Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

### Lizenzbedingungen:

Vielen Lieben Dank, dass du dich für mein Material entschieden hast. Ich würde mich freuen, wenn es dir bei der Unterrichtsgestaltung oder beim selbstständigen Erarbeiten helfen kann. Ich würde mich über ein Feedback dazu freuen!

Du darfst das Material für **deinen eigenen Unterricht** verwenden.

**Du darfst es NICHT gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Grafiken dürfen NICHT herauskopiert werden.**

Hast du Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, kannst du mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren ([info@prof-tegischer.com](mailto:info@prof-tegischer.com)). Auf meiner Homepage [prof-tegischer.com](https://prof-tegischer.com) findest du weitere Informationen zu meinen Materialien.

# Funktionen – Grundlagen

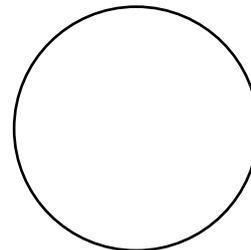
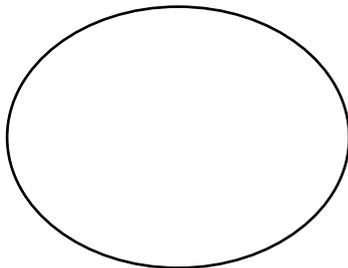


## 1. DEFINITION EINER FUNKTION

**Beispiel:** Ein Mathematiklehrer verteilt nach einer Schularbeit seinen 7 SchülerInnen S1, S2, S3, S4, S5, S6 und S7 eine Note zwischen 1 und 5.

Video 1/9

Definitionsmenge D  
= SchülerInnen



Wertemenge W  
= Schulnoten

Jede Schülerin bzw. jeder Schüler darf nur **eine Note** erhalten! Es können jedoch **mehrere SchülerInnen dieselbe Note** erhalten. Dies ist zugleich die wichtigste Eigenschaft einer Funktion:

### Definition (Funktion)

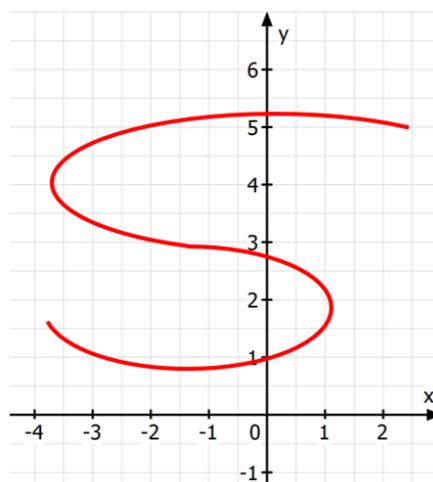
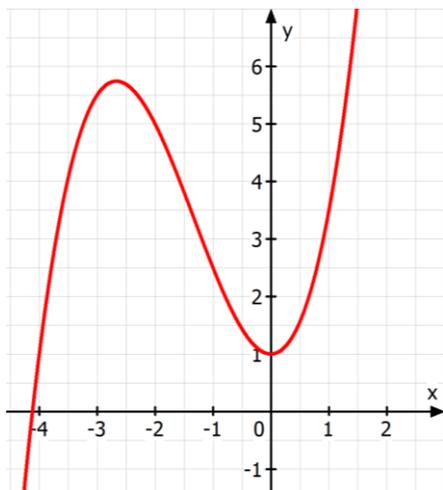
Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung, die jedem Wert aus der **Definitionsmenge D** (Stellen, Argumente) **genau einen Wert** aus der **Wertemenge W** (Funktionswerte) zuordnet.

**Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung.**

Zusammenfassung:

1. **Jedem Element der Definitionsmenge (=Stelle, Argument) (x)** darf **NUR EIN Element der Wertemenge (=FUNKTIONSWERT) (y, f(x))** zugeordnet werden.
2. **ABER Ein Element der Wertemenge (y, f(x))** kann **mehreren Elementen der Definitionsmenge (x)** zugeordnet werden.  
(vgl. das Musterbeispiel der Schülerinnen (x, Definitionsmenge) und der Noten (y, Wertemenge).

**Bsp. 1)** Welcher der folgenden Graphen stellt eine Funktion dar?





## 2. DARSTELLUNG EINER FUNKTION

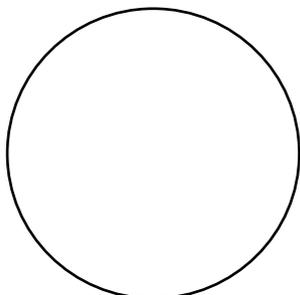
In der Mathematik bestehen die Definitions- und Wertemenge in der Regel aus Zahlen (meist aus den reellen Zahlen). Somit weist die Funktion  $f$  jeder Zahl  $x$  einer Definitionsmenge eine andere Zahl  $y$  einer Wertemenge zu.

### a. Mengendiagramm

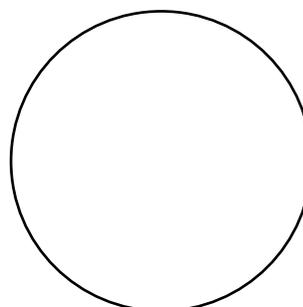
Die Elemente der Definitionsmenge werden durch die Funktion mit Elementen der Wertemenge verbunden. Jedes Element der Definitionsmenge muss genau ein Element der Wertemenge erhalten.

Video 2/9

**Burschen (Definitionsmenge)**



**Lieblingsfarbe (Wertemenge)**



### b. Wertetabelle

- Mit Hilfe einer Wertetabelle können Punkte einer Funktion ermittelt werden. Damit kann der Funktionsgraph gezeichnet werden.
- In der ersten Spalten stehen  $x$ -Werte, in der zweiten die  $y$ -Werte (=Funktionswerte).
- Die **Einheiten** der Größen sollten gegebenenfalls angegeben sein. (bei anwendungsorientierten Aufgaben)

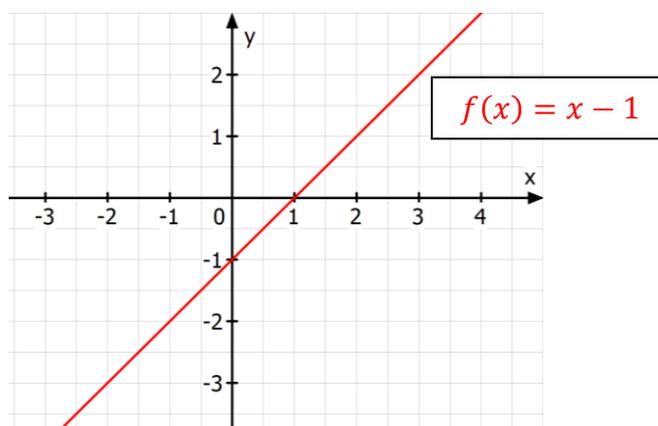
$x$	$f(x) = x - 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

### c. Graph

Um den Graphen einer Funktion zu erhalten, werden Wertepaare in ein Koordinatensystem eingezeichnet:

- Die  **$x$ -Werte** werden auf der **waagrechten Achse** (Abszisse) aufgetragen.
- Die  **$y$ -Werte** wird auf der **senkrechten Achse** (Ordinate) aufgetragen.
- Die Beschriftung der Achsen ist bei jedem Graphen sehr wichtig. Es muss ersichtlich sein, welche Werte auf den einzelnen Achsen und in welchen Einheiten sie aufgetragen werden.

Die  $x$ - und  $y$ -Werte aus der Wertetabelle können in einem Koordinatensystem als Punkte mit den Koordinaten  $(x, y)$  angegeben werden. Das entstehende Gebilde nennt man dann **Graph der Funktion**.



**Bemerkung:** Je nach **Funktionsstyp** kann der Graph der Funktion z.B. eine Gerade oder auch eine Kurve sein (s.u.).

d. Funktionsgleichung

Die Schreibweise  $f(x)$  (gesprochen: „f von x“) drückt aus, dass die Größe f von der Größe x abhängt.

$$f(x) = x - 1 \quad \leftarrow \text{-- Funktionsgleichung!!!}$$

Die Berechnung vom Umfang eines Quadrats kann auch mit Hilfe einer Funktionsgleichung angegeben werden:

$$u(s) = 4 \cdot s$$

- s... gibt die Seitenlänge eines Quadrats an (in cm)
- u(s)... gibt den Umfang eines Quadrats an (in cm)

Weitere Beispiele für Funktionsgleichungen:  $f(x) = x^2$  ;  $f(x) = 3x^2 + 2x - x - 1$  ;  $u(s) = 4 \cdot s$

**Bsp. 2)** Welche Wertetabelle stellt eine Funktion dar?

<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th><math>x</math></th><th><math>f(x)</math></th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>16</td></tr> <tr><td>5</td><td>25</td></tr> <tr><td>6</td><td>36</td></tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">O JA   O NEIN</p>	$x$	$f(x)$	0	0	1	1	2	4	3	9	4	16	5	25	6	36	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th><math>x</math></th><th><math>f(x)</math></th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">O JA   O NEIN</p>	$x$	$f(x)$	0	2	1	3	1	4	2	4	3	3	4	2	5	1	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th><math>x</math></th><th><math>f(x)</math></th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>-6</td><td>3</td></tr> <tr><td>-4</td><td>3</td></tr> <tr><td>-2</td><td>3</td></tr> <tr><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td></tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">O JA   O NEIN</p>	$x$	$f(x)$	-6	3	-4	3	-2	3	0	3	2	3	4	3	6	3
$x$	$f(x)$																																																	
0	0																																																	
1	1																																																	
2	4																																																	
3	9																																																	
4	16																																																	
5	25																																																	
6	36																																																	
$x$	$f(x)$																																																	
0	2																																																	
1	3																																																	
1	4																																																	
2	4																																																	
3	3																																																	
4	2																																																	
5	1																																																	
$x$	$f(x)$																																																	
-6	3																																																	
-4	3																																																	
-2	3																																																	
0	3																																																	
2	3																																																	
4	3																																																	
6	3																																																	
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th><math>x</math></th><th><math>f(x)</math></th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td></tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">O JA   O NEIN</p>	$x$	$f(x)$	3	0	3	1	3	1	3	2	3	3	3	4	3	5	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th><math>x</math></th><th><math>f(x)</math></th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">O JA   O NEIN</p>	$x$	$f(x)$	1	1	1	1	2	1	2	1	3	1	3	1	5	1	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th><math>x</math></th><th><math>f(x)</math></th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>14</td></tr> <tr><td>10</td><td>9</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td></tr> <tr><td>17</td><td>23</td></tr> <tr><td>22</td><td>20</td></tr> <tr><td>28</td><td>29</td></tr> <tr><td>33</td><td>14</td></tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">O JA   O NEIN</p>	$x$	$f(x)$	1	14	10	9	13	14	17	23	22	20	28	29	33	14
$x$	$f(x)$																																																	
3	0																																																	
3	1																																																	
3	1																																																	
3	2																																																	
3	3																																																	
3	4																																																	
3	5																																																	
$x$	$f(x)$																																																	
1	1																																																	
1	1																																																	
2	1																																																	
2	1																																																	
3	1																																																	
3	1																																																	
5	1																																																	
$x$	$f(x)$																																																	
1	14																																																	
10	9																																																	
13	14																																																	
17	23																																																	
22	20																																																	
28	29																																																	
33	14																																																	

### 3. FUNKTIONSTYPEN

Video 3/9



#### 1. Konstante Funktion $f(x) = d$

##### Funktionsgleichung: $f(x) = d$

Bei einer konstanten Funktion nimmt die Funktion **für alle Argumente** (=x-Werte) stets den **selben Funktionswert** an.

Der Graph entspricht einer **Gerade OHNE Steigung**, der die y-Achse auf Höhe des Parameters d schneidet. Der Graph verläuft **parallel zur x-Achse!**

Die konstante Funktion ist ein Sonderfall der linearen Funktion (mit Steigung  $k = 0$ ).

##### PARAMETER

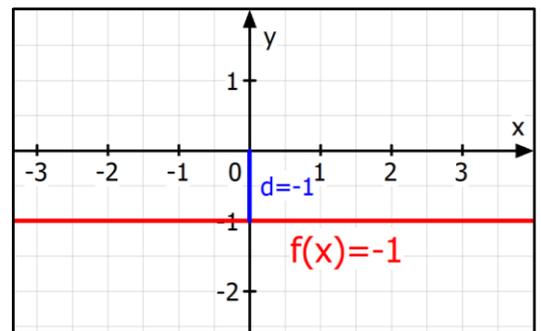
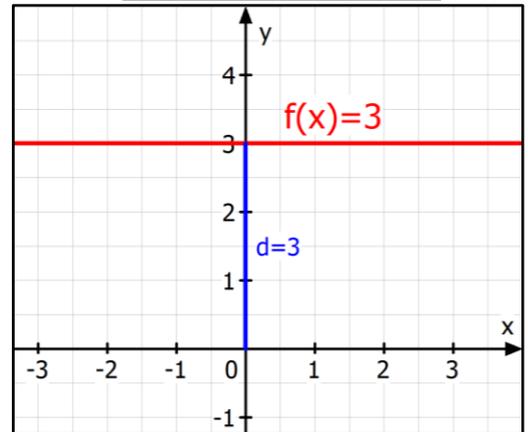
$$f(x) = d$$

Der **Parameter d** gibt den **Schnittpunkt** mit der **y-Achse** an.

**Graphische Bestimmung:** Die Strecke vom Ursprung bis zum Schnittpunkt auf der y-Achse entspricht dem Parameter d.

- unterhalb der x-Achse:  $d < 0$
- oberhalb der x-Achse:  $d > 0$

##### Mögliche Funktionsgraphen:



#### 2. Lineare Funktion $f(x) = kx + d$

##### Funktionsgleichung: $f(x) = kx + d$

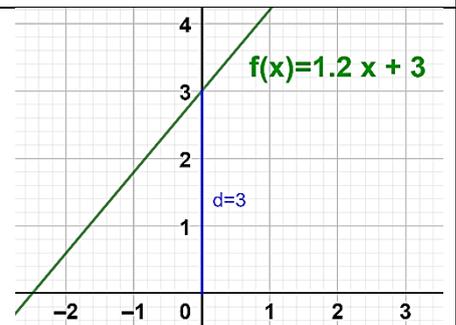
Der **Graph** einer linearen Funktion ist immer eine **Gerade**.

##### Parameter d (Ordinatenabschnitt oder y-Abschnitt):

Der Parameter d ist der Funktionswert an der Stelle  $x = 0$ :

$$d = f(0)$$

Der Parameter d wird auch **Ordinatenabschnitt** (oder y-Abschnitt) an und gibt den Wert des **Schnittpunkts** der Geraden mit der **y-Achse** an.



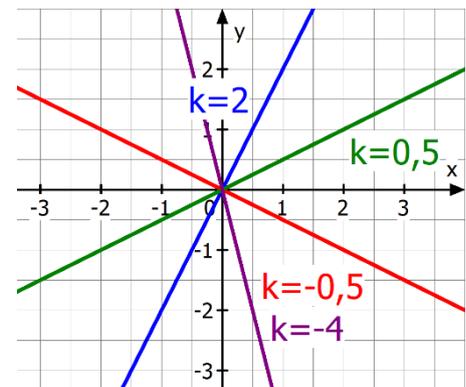
##### Parameter k (Steigung)

Der Parameter k gibt die **Steigung** der linearen Funktion an. Die Steigung k entspricht der Veränderung des Funktionswertes, wenn sich der x-Wert um +1 erhöht:

$$f(x + 1) = f(x) + k$$

Die Steigung k kann graphisch oder rechnerisch bestimmt werden.

- $k > 0$ : Der Graph von  $f$  ist „steigend“.   
 Je größer  $k$  ist, desto stärker steigt die Funktion (Graph ist steiler)
- $k < 0$ : Der Graph von  $f$  ist „fallend“.   
 Je kleiner  $k$  ist, desto stärker fällt die Funktion (Graph ist steiler)
- $k = 0$ : Der Graph von  $f$  ist „konstant“ (keine Steigung)

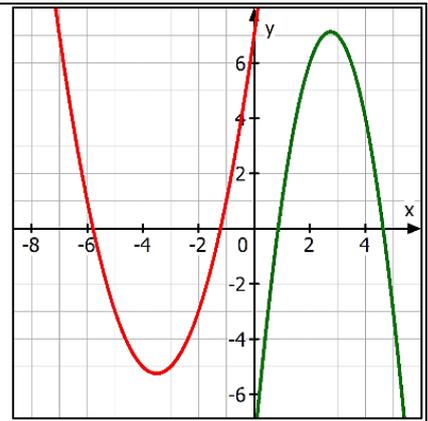


### 3. Quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$

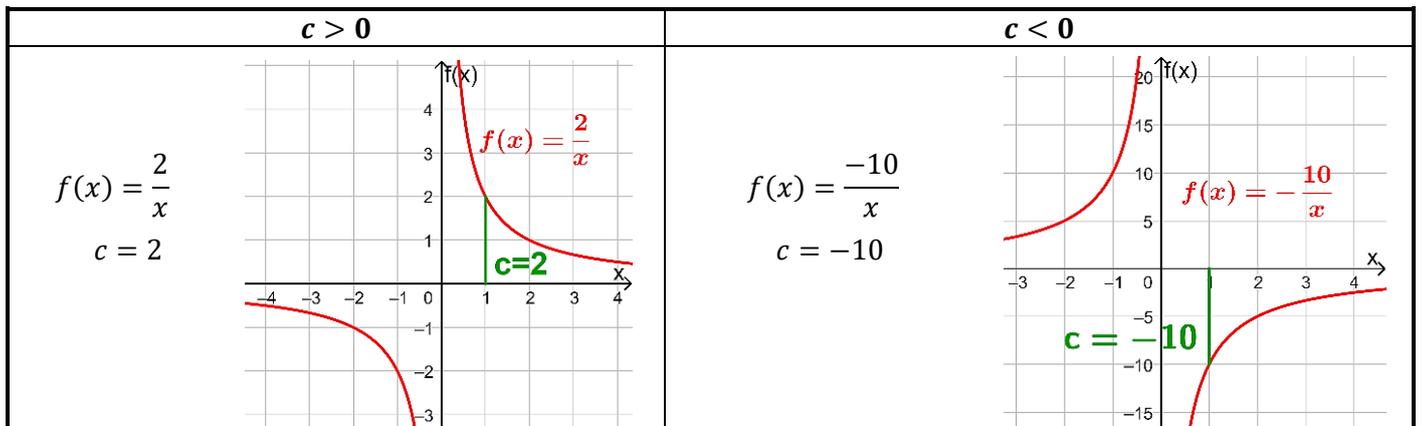
#### Funktionsgleichung:

▪ **Hauptform:**  $f(x) = ax^2 + bx + c$

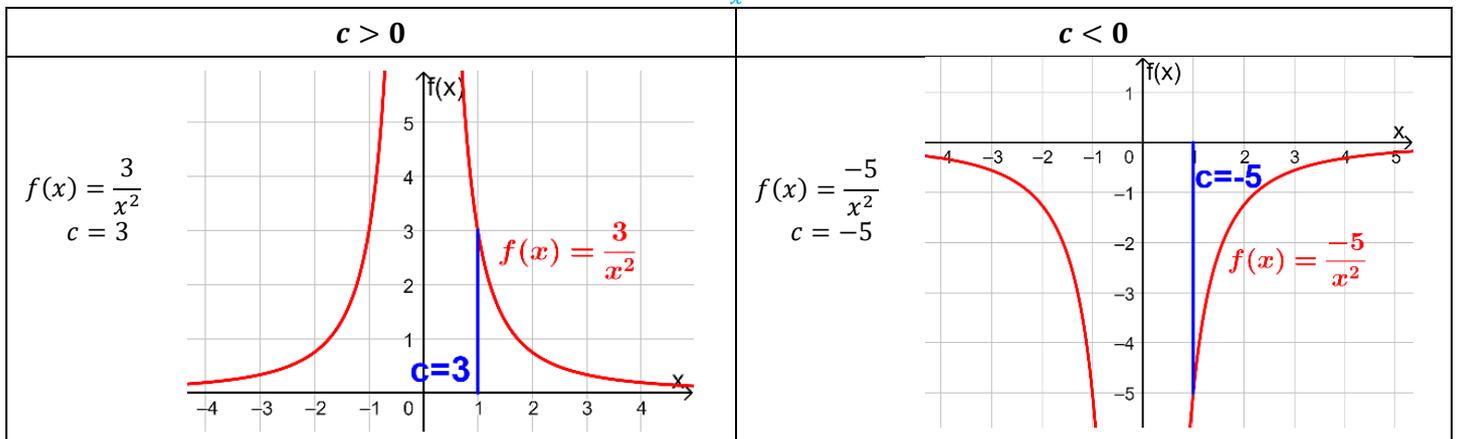
- ❖ Der Graph einer quadratischen Funktion ist **IMMER** eine **Parabel** und damit U- oder  $\cap$ -förmig.
- ❖ Quadratische Funktionen haben immer genau einen **Hoch- oder Tiefpunkt**. Diesen nennt man **Scheitelpunkt** (oder **Scheitel**).



### 4. Gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{c}{x}$



### 5. Gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{c}{x^2}$



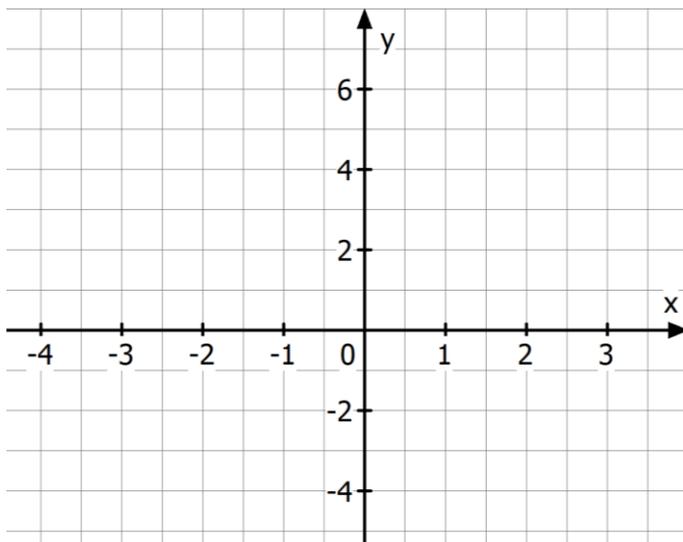


**Bsp. 3)** Erstelle eine **Wertetabelle** der gegebenen Funktion im vorgegebenen Intervall.  
**Skizziere** den **Graphen** der Funktion.

$$f(x) = x + 2 \quad \text{im Intervall } [-4; 3]$$

**Bemerkung:** Die Funktion  $f(x) = x + 2$  ist eine lineare Funktion. Der **Graph** einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.

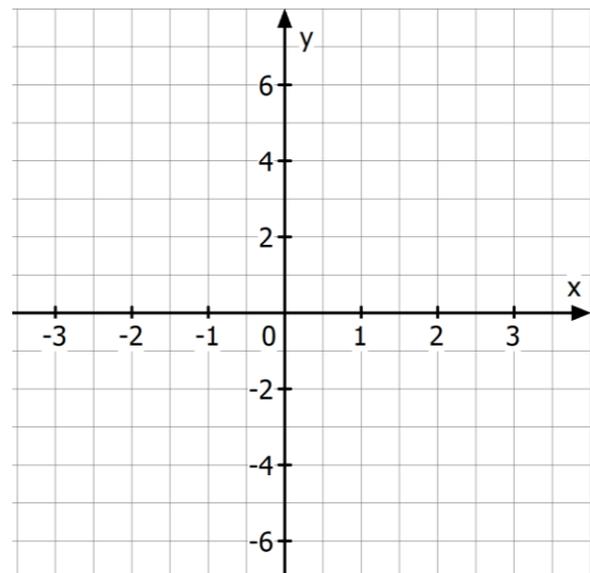
$x$	$y = f(x)$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



$$f(x) = x^2 - 5 \quad \text{im Intervall } [-3; 3]$$

**Bem.:** Die Funktion  $f(x) = x^2 - 5$  ist eine **quadratische Funktion**. Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine **Parabel**.

$x$	$y = f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



**Bsp. 4)** Erstelle eine Wertetabelle und zeichne die Funktion im Intervall  $[-3;3]$ . Wähle eine passende Skalierung der y-Achse. Gib den Funktionstyp an (Konstante, Lineare, Quadratische Funktion)

**a.**  $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

x	f(x)
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Funktionstyp:

**b.**  $f(x) = 3x^2 - 20$

x	f(x)
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Funktionstyp:

**c.**  $f(x) = 3$

x	f(x)
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Funktionstyp:

**d.**  $f(x) = -100x + 200$

x	f(x)
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Funktionstyp:

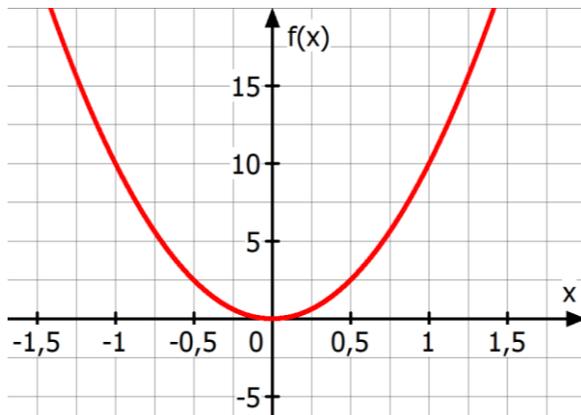
#### 4. BEZEICHNUNGEN BEI FUNKTIONEN

- Die Elemente der Definitionsmenge  $D$  einer Funktion nennt man **Argumente** oder **Stellen** einer Funktion.
- Die Elemente der Wertemenge  $W$  nennt man **Funktionswerte** einer Funktion.
- $f(x)$  ist der **Funktionswert** der Funktion  $f$  **an der Stelle**  $x$ .
- Der **Graph** der Funktion  $f$  besteht aus den **Punkten**  $(x|f(x))$ .



[Video 5/9](#)

**Bsp. 5)** Ermittle die Lösung graphisch.



$f(0,5) =$

$f(-1) =$

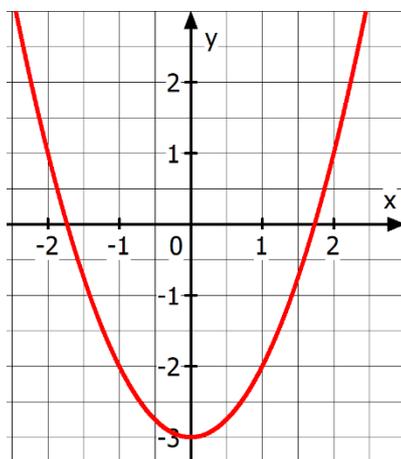
An welchen Stellen hat die Funktion den Funktionswert  $f(x) = 15$ ?

Gib die Koordinaten des Punktes an der Stelle  $x = 0,5$  an.

#### Unterschied Stelle (Argument) – Punkt

- Punkte bestehen aus einer  $x$ - und  $y$ - Koordinate  $P = (x, y)$
- Eine Stelle (Ein Argument) ist jedoch nur der zugehörige  $x$ -Wert des Punktes  $P$ .

**Bsp.:** Der Punkt  $P = (3|4)$  besitzt die Stelle  $x = 3$ .



**Bsp. 6)** Beantworte die Fragen. Bei den Aufgaben (a) und (d) zeichne zusätzlich die graphische Bestimmung ein.

a.  $f(-2) =$

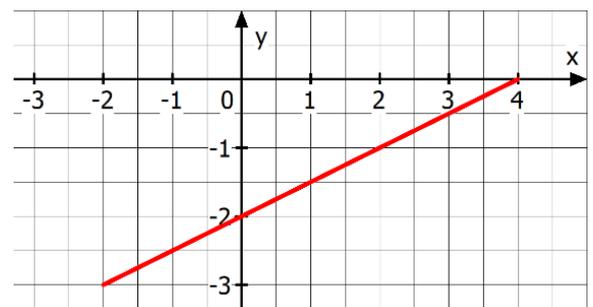
b.  $f(1) =$

c. Wie lautet der Funktionswert an der Stelle  $x = -1$ :

d. An welcher Stelle/n hat die Funktion den Funktionswert  $f(x) = -3$ ?

e. An welcher Stelle/n hat die Funktion den Funktionswert  $f(x) = 1$ ?

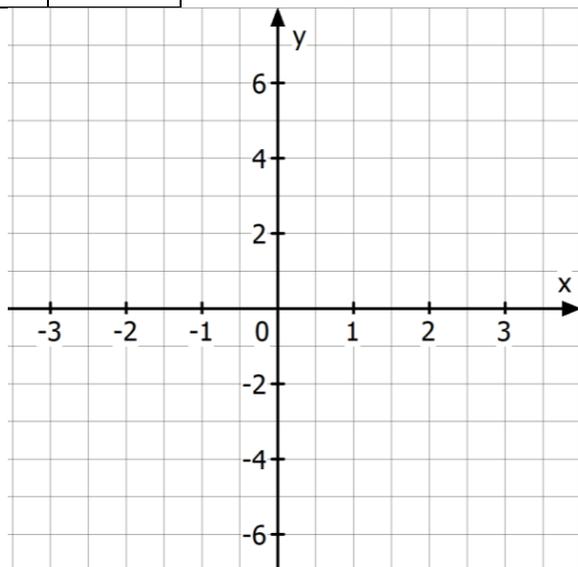
**Bsp. 7)** Gib die **Definitions-** und **Wertemenge** der Funktion an.



**Bsp. 8) Zeichne** den Graphen der gegebenen Funktion für die angegebene Definitionsmenge und bestimme die **Wertemenge** der Funktion.

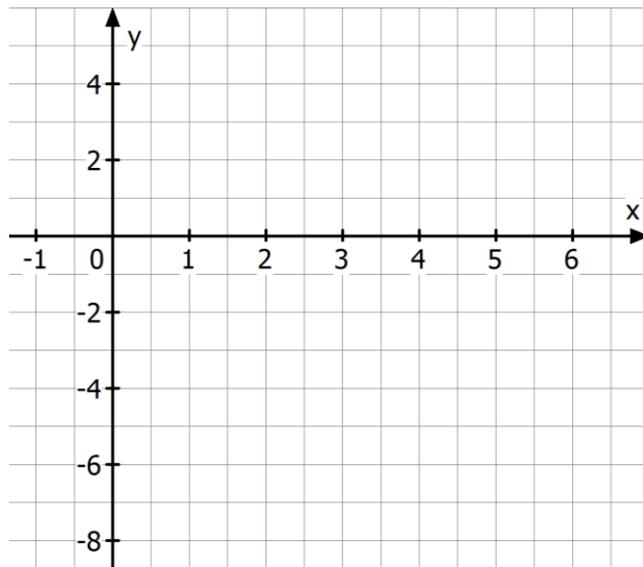
$$f(x) = -2x + 1 ; D = [-3; 3]$$

$x$	$y = f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



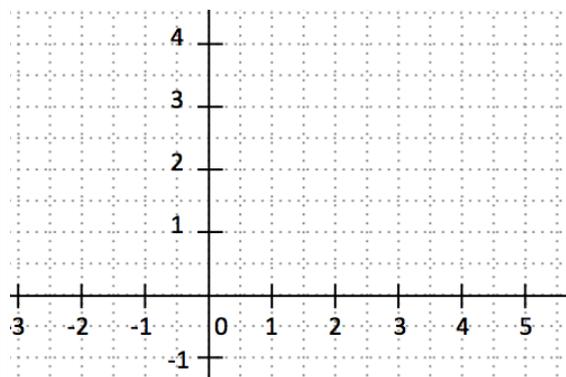
$$f(x) = x^2 - 6x + 3 \text{ im Intervall } [0; 6]$$

$x$	$y = f(x)$
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

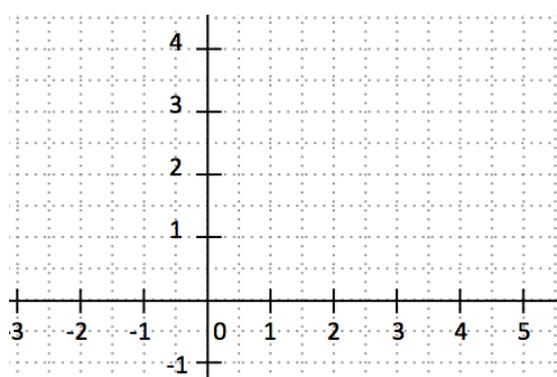


**Bsp. 9) Skizziere** einen **beliebigen Graphen** der Funktion  $f$ , für den folgende **Bedingungen** gelten:

- $D_f = [-2; 5]$
- $W_f = [-1; 3]$
- $f(-1) = -1$
- $f(3) = 3$
- $f(5) = 2$



- $D_f = [-2; 3]$
- $W_f = [1; 3]$
- $f(-1) = 2$
- $f(2) = 1$
- $f(3) = 2$



## 5. PUNKTE AUF EINEM FUNKTIONSGRAPHEN



**Überprüfung:** Liegt ein Punkt auf einer Funktion?

Setze die **x-Koordinate** des Punktes in die **Funktionsgleichung** ein. Stimmt der erhaltene **Funktionswert** mit der **y-Koordinate** des Punktes überein, so liegt der **Punkt** auf dem **Funktionsgraphen!!!**

Video 6/9

$A = (5 3), f(x) = 2x - 7$ Liegt der Punkt A auf dem Funktionsgraphen?  $A = (5 3) \rightarrow x - \text{Koordinate: } x = 5$ $f(5) = 2 \cdot 5 - 7 = 10 - 7 = 3$  $f(5) = 3 \text{ \& } A = (5 3)$ → Der Punkt A liegt auf dem Graphen von $f(x)$ .	$A = (2 3), f(x) = x^2 + 2x - 7$ Liegt der Punkt A auf dem Funktionsgraphen?  $A = (2 3) \rightarrow x - \text{Koordinate: } x = 2$ $f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 7 = 4 + 4 - 7 = 1$  $f(2) = 1 \text{ \& } A = (2 3) \rightarrow 1 \neq 3$ → Der Punkt A liegt <b>NICHT</b> auf dem Graphen von $f(x)$ .
---	--

**Bsp. 10)** Bestimme, ob der **gegebene Punkt** auf dem Funktionsgraphen der Funktion liegt.

$A = (2 8), f(x) = x^2 + 3x - 2$	$A = (0 4), f(x) = 5x + 4$	$A = (-1 -1), f(x) = 3x - 3$
$A = (-3 5), f(x) = x^2 + 3x + 4$	$A = (6 -9), f(x) = -x^2 - 5x + 1$	$A = (-2 10), f(x) = x^2 - 4x - 2$

### Beliebige Punkte auf einem Funktionsgraphen bestimmen

Möchtest du zu einer gegebenen Funktion beliebige Punkte des Funktionsgraphen bestimmen, so musst du nur x-Werte in den Funktionsgraphen einsetzen. Der erhaltene Funktionswert entspricht der zugehörigen y-Koordinate des Punktes. (vgl. Wertetabelle)

$f(x) = 3x + 7$  <b>Bestimme drei beliebige Punkte auf dem Funktionsgraphen:</b> $x = 1 \rightarrow f(1) = 3 \cdot 1 + 7 = 10 \rightarrow A = (1 10)$ $x = -4 \rightarrow f(-4) = 3 \cdot (-4) + 7 = -12 + 7 = -5 \rightarrow B = (-4 -5)$ $x = 3 \rightarrow f(3) = 3 \cdot 3 + 7 = 16 \rightarrow C = (3 16)$	$f(x) = -x^2 + x - 1$  <b>Bestimme drei beliebige Punkte auf dem Funktionsgraphen:</b> $x = 1 \rightarrow f(1) = -1^2 + 1 - 1 = -1 + 1 - 1 = -1 \rightarrow A = (1 -1)$ $x = -4 \rightarrow f(-4) = -(-4)^2 - 4 - 1 = -16 - 4 - 1 = -21 \rightarrow B = (-4 -21)$ $x = 3 \rightarrow f(3) = -3^2 + 3 - 1 = -9 + 3 - 1 = -7 \rightarrow C = (3 -7)$
--	---

**Bsp. 11)** Bestimme je zwei beliebige Punkte auf dem Funktionsgraphen. Wähle immer verschiedene Argumente (=x-Werte)

$f(x) = x^2 + 3x - 2$	$f(x) = 5x + 4$
$f(x) = 5x^2 - 16$	$f(x) = -x^2 - 5x + 1$



### INTERPRETIEREN

Interpretieren heißt in der Mathematik, die **Bedeutung** eines mathematischen Ausdrucks (Zahl, Koordinate, Term, Gleichung, ...) im geschilderten **Sachzusammenhang** (Kontext) zu **beschreiben**. Bei dieser Beschreibung sollte man **Alltagssprache** verwenden und soweit wie möglich auf **mathematische Formulierungen verzichten**.

**Bsp. 12)**  $Z(x)$  bezeichnet die Zeit in Stunden, die  $x$  Personen für eine bestimmte Arbeit benötigen. Interpretiere folgende Ausdrücke im Kontext.

Ausdruck	Interpretation
$Z(15) = 30$	
$Z(4)$	
$Z(11) < Z(5)$	
$Z(6) = \frac{1}{2} \cdot Z(3)$	
$Z(1) = Z(3) + 4$	

**Bsp. 13)**  $s(t)$  beschreibt den Weg  $s$  (in m), den eine Person in  $t$  Minuten zurücklegt. Interpretiere den Ausdruck im Kontext.

Ausdruck	Interpretation
$s(3) = 150$	
$s(7) = s(6) + 50$	
$s(2t) = 2s(t)$	
$s(100) - s(90) = 300$	

**Bsp. 14)**  $s(t)$  beschreibt die Strecke (in km), die ein Auto in  $t$  Stunden zurücklegt. Übersetze folgende Aussagen in die Funktions-Sprache.

Ausdruck	Interpretation
$s(5) = 100$	Nach fünf Stunden hat das Auto 100 km zurückgelegt.
	Nach sechs Stunden ist das Auto um 250 km mehr gefahren als nach vier Stunden.
	Nach vier Stunden ist das Auto dreimal soweit gefahren, wie nach einer Stunde.
	Das Auto legt jede Stunde 35 km zurück.
	Das Auto hat nach acht Stunden Fahrzeit im Durchschnitt 30km pro Stunde zurückgelegt.

## 7. NULLSTELLEN EINER FUNKTION



Ist an einer Stelle  $x$  der Funktionswert  $f(x)$  gleich 0, so nennt man  $x$  eine **Nullstelle** der Funktion  $f$ .

$$f(x) = 0$$

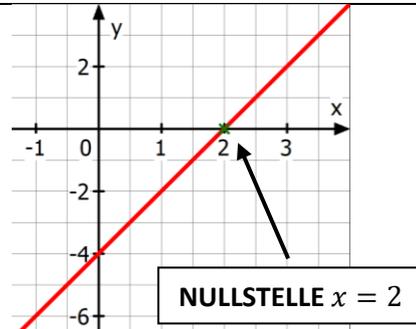
Der Graph schneidet an dieser Stelle die waagrechte Achse (Abszisse).

Video 8/9

Willst du die Nullstellen einer Funktion bestimmen, musst du die Gleichung  $f(x) = 0$  lösen.

**Beispiel:**  $f(x) = 2x - 4$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2x - 4 &= 0 \quad | +4 \\ 2x &= 4 \quad | :2 \\ x &= 2 \\ \rightarrow x = 2 &\text{ ist eine } \mathbf{Nullstelle} \end{aligned}$$



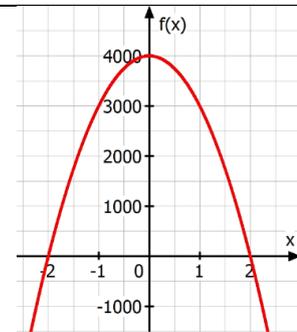
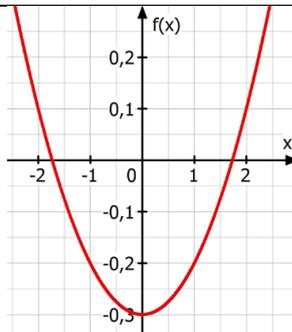
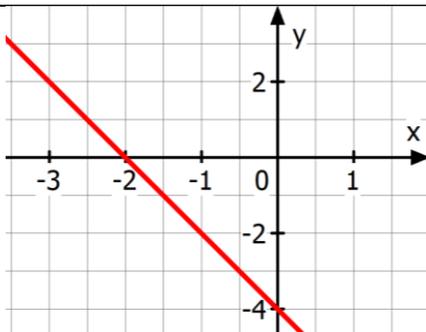
**Bsp. 15)** Bestimme rechnerisch die Nullstellen der Funktion  $f$ .

a.  $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$

b.  $f(x) = -4x$

c.  $f(x) = x^2 - x - 12$

**Bsp. 16)** Bestimme **graphisch** die Nullstelle/n der Funktion  $f$ .



**Bsp. 17)** Interpretiere die Bedeutung der angegebenen **Nullstelle** im jeweiligen Kontext.

- a.  $h(t)$  gibt die Höhe  $h$  (in m) eines senkrecht hinauf geworfenen Steines  $t$  Sekunden nach dem Abwurf an.  
 $h(8) = 0$

- b.  $W(J)$  gibt das Wirtschaftswachstum  $W$  im Jahr  $J$  an.  
 $W(2014) = 0$

## 8. BERECHNUNGEN MIT EINER FUNKTIONSGLEICHUNG

Video 9/9



Es gibt stets **zwei Möglichkeiten** (IMMER!!), wie du mit einer Funktion **Berechnungen** durchführen kannst.

### Möglichkeit 1: Argument (=Stelle) gegeben -> Funktionswert gesucht

$$f(x) = x^2 - 5$$

**Frage:** Wie lautet der Funktionswert an der Stelle  $x = 2$ ?

Wenn ein **Argument** gegeben & der **zugehörige Funktionswert** gesucht ist, musst du das Argument in die Funktionsgleichung einsetzen und berechnen:

$$f(2) = 2^2 - 5 = 4 - 5 = -1$$

**Bemerkung:** Wenn du zu einem Argument den Funktionswert berechnet hast, kannst du in weiterer Folge die Koordinaten des Punktes bestimmen:

$$f(2) = -1 \rightarrow P = (2 | -1)$$

↗ ↖

**x-Koordinate**      **y-Koordinate**

### Möglichkeit 2: Funktionswert gegeben -> Stelle/Argument gesucht

Ist ein Funktionswert gegeben, so musst du diesen Wert STATT deiner Funktion einsetzen. In weiterer Folge musst du die Gleichung lösen, um deine Lösung zu erhalten!!

Bemerkung:

- Bei einer linearen Funktion musst du eine lineare Gleichung lösen!
- Bei einer quadratischen Funktion erhältst du eine quadratische Gleichung!

**Fragestellung:** Bei welcher/n Stelle/n hat die Funktion einen Funktionswert von  $f(x) = 10$ ?

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 4 \\ 10 &= 2x - 4 \quad | +4 \\ 14 &= 2x \quad | :2 \\ 7 &= x \end{aligned}$$

An der Stelle  $x = 7$  hat die Funktion den Funktionswert 10. Es gilt:  $f(7) = 10$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 4x + 4 \\ 10 &= 2x^2 + 4x + 4 \quad | -10 \\ 0 &= 2x^2 + 4x - 6 \\ 2x^2 + 4x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Große Lösungsformel: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$\rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 1$$

An den Stellen  $x_1 = -3$  und  $x_2 = 1$  hat die Funktion den Funktionswert 10.

**Bsp. 18)** Berechne zu der Funktion jeweils den Funktionswert an der Stelle  $x = -4$ ,  $x = 1$  und  $x = 10$ .

$$f(x) = -5x + 20$$

$$f(x) = -x^2 - 2x - 6$$

**Bsp. 19)** Berechne das Argument/die Argumente, bei der/denen der gewünscht Funktionswert auftritt.

$f(x) = \frac{1}{3}x + 6$ <p><b>gesucht:</b> <math>f(x) = -1</math>?</p>	$f(x) = -x^2 + 2x + 4$ <p><b>gesucht:</b> <math>f(x) = 1</math>?</p>
--	--

### Anwendungsorientiertes Beispiel

**WH:** Es gibt **IMMER** zwei Möglichkeiten, um Berechnungen mit einer Funktionsgleichung durchzuführen!

$h(t) = -0,5 \cdot t + 10$  beschreibt die Höhe einer Kerze, die mit zunehmenden Abbrennen immer kleiner wird. Zu Beginn ist die Kerze 10 cm hoch, da  $h(0) = 10$  ist. Pro Minute wird die Kerze um 0,5 cm kleiner.

<b>Möglichkeit 1: Argument („x-Wert“) gegeben</b> -> zugehöriger Funktionswert gesucht (EINSETZEN!)	<b>Möglichkeit 2: Funktionswert gegeben</b> -> zugehörige/s Argument/e gesucht, bei denen der Funktionswert eintritt (Wert statt $f(x)$ , $N(t)$ , ... einsetzen)
<p>ARGUMENTE = Zeitpunkte (in diesem Beispiel)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Wie hoch ist die Kerze nach 5 Minuten?</li> </ul> <p><b>Argument</b> <math>t = 5</math> -&gt; zugehöriger Funktionswert <math>h(5)</math> gesucht</p> $h(5) = -0,5 \cdot 5 + 10 = -2,5 + 10 = 7,5 \text{ cm}$ <p>Ist ein Argument gegeben, so musst du dieses Argument in die Funktionsgleichung einsetzen, um den zugehörigen Funktionswert zu erhalten 😊</p>	<p>FUNKTIONSWERTE = Höhe der Kerze</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Wann erreicht die Kerze eine Höhe von 3 cm?</li> </ul> <p><b>Funktionswert</b> <math>h(t) = 3</math> -&gt; Argument/Zeitpunkt gesucht!!!</p> $h(t) = -0,5 \cdot t + 10$ $3 = -0,5 \cdot t + 10 \quad   -10$ $-7 = -0,5 \cdot t \quad   : (-0,5)$ $14 = t \rightarrow \text{nach 14 Minuten}$ <p>Ist ein Funktionswert gegeben, so musst du diesen Wert statt der Funktion <math>f(x)</math>, <math>N(t)</math>, ... einsetzen und die entstehende Gleichung nach dem Argument auflösen. 😊</p>

**Bsp. 20)** Das Geburtsgewicht von Moritz (in Gramm) kann mit Hilfe der Funktion  $N(t) = 3000 + 300 \cdot t$  angegeben werden. Die Zeit  $t$  gibt dabei die Wochen nach der Geburt an.

- a. Moritz ist bei seiner Taufe 9 Wochen alt. Welches Gewicht hat er?
- b. Wann erreicht Moritz ein Gewicht von 6,3 kg?

**Bsp. 21)** Bei einem großen Schwimmteich ist am Boden bei der Teichfolie ein Loch entstanden. Ursprünglich waren im Schwimmteich 100 000 Liter Wasser. Pro Minuten rinnen nun 50 Liter Wasser ab. Dieses Modell kann mit Hilfe der Funktionsgleichung  $N(t) = 100\,000 - 50 \cdot t$  angegeben werden, wobei  $N(t)$  das Wasservolumen nach  $t$  Minuten angibt.

- a. Nach wie vielen Minuten bzw. Stunden sind nur mehr 15% vom ursprünglichen Wasservolumen im Badeteich?
- b. Wie viele Liter Wasser sind nach 2 Stunden noch im Teich?
- c. Wann ist der Teich komplett ausgeronnen? (Tipp: Wann sind 0 Liter im Teich)

**Bsp. 22)** Ein Bogenschütze schießt einen Pfeil senkrecht in die Höhe. Die Höhe  $h$  (in Meter) des Pfeils in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  (in Sekunden) wird beschrieben durch die Funktionsgleichung:

$$h(t) = -t^2 + t + 2$$

- a. Löse die Gleichung  $h(t) = 0$  und erkläre die Bedeutung der Lösungen.
- b. Nach welcher Zeit hat der Pfeil wieder die Abschusshöhe ( $h = 2m$ ) erreicht?
- c. Wie hoch fliegt der Pfeil nach 1,5 Sekunden?