

Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme in zwei Variablen



SCAN ME

Video 1/9

1. LINEARE GLEICHUNGEN IN ZWEI VARIABLEN

Eine Gleichung der Form

$$a \cdot x + b \cdot y = c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}; a, b \neq 0$$

wird **lineare Gleichung** in zwei Variablen genannt.

Jedes Zahlenpaar $(x|y)$, das diese Gleichung erfüllt, ist eine Lösung dieser Gleichung.

Bsp. 1) Gib drei verschiedene Lösungen zu folgender Gleichung an:

$$2x - 4y = 8 \quad \rightarrow \quad 2x = 4y + 8 \quad | :2$$

$$x = 2y + 4$$

$L_1 = \mathcal{E}(6|1)$ $L_2 = \mathcal{E}(0|-2)$ $L_3 = \mathcal{E}(14|5)$

Bsp. 2) Bei einer Feier gibt es x Tische mit fünf Plätzen und y Tische mit acht Plätze. Bei der Feier sind insgesamt 200 Personen geladen. Stelle den Sachverhalt durch eine **lineare Gleichung** in zwei Variablen dar.

Gib 3 Möglichkeiten an, auf wie vielen Tischen (fünf Plätze bzw. acht Plätze) die geladenen Gäste aufgeteilt werden können.

$$5x + 8y = 200$$

① $x=40, y=0$ ③ $x=8, y=20$
 ② $x=24, y=10$

Eine lineare Gleichung in zwei Variablen kann in zwei Formen angegeben werden:

- **allgemeine Form:** $a \cdot x + b \cdot y = c$ z.B. $6x + 2y = 13$
- **Hauptform:** $y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{b}$ ($b \neq 0$) z.B. $y = -3x + \frac{13}{2}$

Beweis: Forme die allgemeine Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ auf $y = \dots$ um.

$$0x + by = c - ax$$

$$by = -ax + c \quad | :b$$

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Bsp. 3) Wandle die Gleichung in die **Hauptform** um. Ist es möglich? Begründe deine Antwort.

<p>a. $3x + 9y = 27$ $-3x$</p> $9y = -3x + 27$ $y = -\frac{1}{3}x + 3$	<p>b. $10x = 15$</p> <p>NEIN</p>	<p>c. $\frac{4}{8}x + \frac{3}{4}y = 8$ -8</p> $4x + 6y = 64 \quad :2$ $2x + 3y = 32 \quad -2x$ $3y = -2x + 32 \quad :3$ $y = -\frac{2}{3}x + \frac{32}{3}$	<p>d. $0,3y = 9$ $:0,3$</p> $y = 30$
---	---	--	---

Bsp. 4) Haben folgende Gleichungen dieselbe Lösungsmenge? Begründe deine Antwort.

$$-6x + 18y = 2 \quad | +18y \quad x = 3y - \frac{1}{3}$$

$$-6x = -18y + 2 \quad | :(-6)$$

$$x = 3y - \frac{1}{3} \quad \text{⊖}$$

$$18x - 36y = -4 \quad | +36y$$

$$18x = 36y - 4 \quad | :18$$

$$x = 2y - \frac{4}{18} \quad \text{⊕} \quad \text{NEIN!}$$

2. LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME MIT ZWEI VARIABLEN

Fasst man zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen zusammen, so erhält man ein so genanntes **lineares Gleichungssystem** in zwei Variablen.

$$\begin{aligned} | &: a \cdot x + b \cdot y = c \\ || &: d \cdot x + e \cdot y = f \quad (a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems sind alle Zahlenpaare $(x|y)$, die beide Gleichungen erfüllen.



Video 2/9

Mit folgenden Verfahren können lineare Gleichungssysteme gelöst werden:

2.1 EINSETZUNGSVERFAHREN (SUBSTITUTIONSMETHODE)

In einer Gleichung wird eine Variable ausgedrückt. Dieser Term ersetzt die Variable in der anderen Gleichung.

	: $x + 3y = 10$: $2x + 5y = 24$
1) Eine Gleichung nach einer Variablen (x oder y) auflösen. <i>In diesem Beispiel lösen wir die 1. Gleichung nach x auf.</i>	: $x + 3y = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 3y$
2) Den Term für diese Variable in die andere Gleichung einsetzen. <i>D.h. wir setzen $x = 10 - 3y$ in die 2. Gleichung statt dem x ein.</i>	: $2 \cdot (10 - 3y) + 5y = 24$
<i>Das Schwierigste ist geschafft! Ab jetzt entspricht es dem Lösen einer linearen Gleichung in 1 Variablen.</i>	
3) Die Gleichung nach der enthaltenen Variablen auffösen .	: $20 - 6y + 5y = 24 \Leftrightarrow$: $-y = 4 \Leftrightarrow$: $y = -4$
4) Die Lösung in die umgeformte Gleichung aus Schritt 1 einsetzen und so die zweite Variable berechnen. <i>Wir setzen $y = -4$ in $x = 10 - 3y$ ein.</i>	$x = 10 - 3 \cdot (-4) \Leftrightarrow x = 22$
5) Mache die Probe . WICHTIG: Verwende immer die Gleichung, die du im Schritt 4 NICHT benutzt hast!	in : $2 \cdot 22 + 5 \cdot (-4) = 24$ $44 - 20 = 24$ $24 = 24$ w. A.
6) Die Lösung besteht aus dem Zahlenpaar $(x y)$.	$x = 22, y = -4 \quad L = \{(22 -4)\}$

Bsp. 3) Löse mithilfe des Einsetzungsverfahrens:

$\begin{aligned} &: 4x - 2y = 6 \\ &: 2x + 2y = 18 \end{aligned}$ <p>II $2x + 2y = 18 \quad -2y$ $2x = -2y + 18 \quad :2$ $x = -y + 9$</p> <p>\rightarrow in I: $4 \cdot (-y + 9) - 2y = 6$ $-4y + 36 - 2y = 6 \quad -36$ $-6y = -30 \quad :(-6)$ $y = 5$</p> <p>in II: $x = -5 + 9$ $x = 4$</p> <p>$L = \{(4 5)\}$</p> <p>Probe in I: $4 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 6$ $16 - 10 = 6$ $6 = 6$ w. A.</p>	$\begin{aligned} &: 3x + 2y = 10 \\ &: x - 3 = -y \quad \cdot (-1) \end{aligned}$ <p>$y = -x + 3$</p> <p>in I: $3x + 2 \cdot (-x + 3) = 10$ $3x - 2x + 6 = 10 \quad -6$ $x = 4$</p> <p>in II: $y = -4 + 3$ $y = -1$</p> <p>Probe in I: $3 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) = 10$ $12 - 2 = 10$ $10 = 10$ w. A.</p> <p>$L = \{(4 -1)\}$</p>
---	--

Video 3/9

2.2 ADDITIONSVERFAHREN (ELIMINATIONSMETHODE)

Es wird mit geeigneten Zahlen so multipliziert, dass bei der anschließenden Addition der beiden Gleichungen eine Variable wegfällt.



	$: 6x + 7y = 29$ $: 3x - 5y = 6$	Video 4/9
<p>1) Entscheide, welche Variable (x oder y) du eliminieren willst und überlege, was du tun musst, damit die Variable wegfällt.</p> <p>Bemerkung 1: In diesem Fall wird die zweite Gleichung mit (-2) multipliziert, sodass bei der Addition der Gleichungen, die x-Variable eliminiert wird.</p> <p>Bemerkung 2: Es kann vorkommen, dass du auch beide Gleichungen mit einer Zahl einmultiplizieren musst!</p>	$: 6x + 7y = 29$ $: 3x - 5y = 6 \quad \cdot (-2)$ <hr/> $: 6x + 7y = 29$ $: -6x + 10y = -12$ <hr/> $17y = 17$	
2) Addiere nun die erste mit der zweiten Gleichung, sodass eine Variable wegfällt.		
3) Löse die erhaltene Gleichung auf.	$17y = 17 \quad :17$ $y = 1$	
4) Setze die berechnete Variable in eine der angegebenen Gleichungen ein, um die zweite Variable berechnen zu können.	$: 6x + 7 \cdot 1 = 29 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3}$	
5) Mache die Probe . WICHTIG: Verwende immer die Gleichung, die du im Schritt 4 NICHT benutzt hast!	$in \quad : 3 \cdot \frac{11}{3} - 5 \cdot 1 = 6$ $11 - 5 = 6$ $6 = 6 \text{ w.A.}$	
6) Die Lösung besteht aus dem Zahlenpaar $(x y)$.	$x = \frac{11}{3}, y = 1 \quad L = \left\{ \left(\frac{11}{3} 1 \right) \right\}$	

Bsp 6 Löse mithilfe des Additionsverfahrens:

$: 16x + 5y = 11 \quad \cdot 4$ $: 6x - 4y = 10 \quad \cdot 5$ <hr/> $64x + 20y = 44$ $30x - 20y = 50$ <hr/> $94x = 94 \quad :94$ $x = 1$ <hr/> $in I: 16 \cdot 1 + 5y = 11 \quad -16$ $5y = -5 \quad :5$ $y = -1$ <hr/> $Probe \text{ in } II:$ $6 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) = 10$ $6 + 4 = 10$ $10 = 10 \checkmark$	$: 4x + 7y = 8 \quad \cdot 2$ $: -8x + 3y = 52$ <hr/> $8x + 14y = 16$ $-8x + 3y = 52$ <hr/> $17y = 68 \quad :17$ $y = 4$ <hr/> $in I: 4x + 28 = 8 \quad -28$ $4x = -20 \quad :4$ $x = -5$ <hr/> $Probe \text{ in } II:$ $-8 \cdot (-5) + 3 \cdot 4 = 52$ $40 + 12 = 52$ $52 = 52 \checkmark$
---	---

TIPP - So funktioniert es immer: Multipliziere die 1. Gleichung mit dem x-Koeffizienten (oder y) der 2. Gleichung und die 2. Gleichung mit dem negativen x-Koeffizienten (oder y) der 1. Gleichung.

2.3 GLEICHSETZUNGSVERFAHREN (KOMPARATIONSMETHODE)

Aus beiden Gleichungen wird dieselbe Variable ausgedrückt und die Terme werden gleichgesetzt.



$: x + y = 3$ $: x - 20y = -18$		Video 5/9
1) Löse beide Gleichungen nach der gleichen Variable (x oder y) auf. Bemerkung: In diesem Beispiel werden die Gleichungen auf $x =$ umgeformt.		$: x = 3 - y$ $: x = 20y - 18$
2) Setze die Gleichungen gleich ($x = x$). Es entsteht wieder eine lineare Gleichung in 1 Variable.		$x = x$ $3 - y = 20y - 18$
3) Löse die Gleichung nach der gegebenen Variable auf.		$21 \cdot y = 21 \Leftrightarrow y = 1$
4) Setze die Lösung in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 ein, um die andere Variable zu erhalten.		$x = 3 - 1 \Leftrightarrow x = 2$
5) Mache die Probe . WICHTIG: Verwende immer die Gleichung, die du im Schritt 4 NICHT benutzt hast!		in $: 2 = 20 \cdot 1 - 18$ $2 = 2$ w. A.
6) Die Lösung besteht aus dem Zahlenpaar (x y).		$x = 2, y = 1 \quad L = \{(2 1)\}$

Bsp. 7 Löse mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens:

$: 3x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 3x$ $: 7x - y = 5 \Rightarrow y = 7x - 5$ $y = y$ $5 - 3x = 7x - 5 \quad +5, +3x$ $10 = 10x \quad :10$ $\Rightarrow \underline{x = 1}$ in I: $3 + y = 5$ $y = 2$ Probe II: $7 - 2 = 5$ $5 = 5 \checkmark$ $L = \{(1 2)\}$	$: 10x - 4y = 6 \Rightarrow 10x = 4y + 6$ $: 10x - 6y = -6 \Rightarrow 10x = 6y - 6$ $10x = 10x$ $4y + 6 = 6y - 6 \quad -4y, +6$ $12 = 2y \quad :2$ $y = 6$ in I: $10x - 24 = 6 \quad +24$ $10x = 30$ $x = 3$ $L = \{(3 6)\}$ Probe in II: $30 - 36 = -6$ $-6 = -6 \checkmark$ w. A.
--	---

Bsp. 8 Löse intelligent mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens. Was kannst du gleich setzen?

$$|: 3x + 2y = 0 \Rightarrow 3x = -2y$$

$$||: 3x - y = 9 \Rightarrow 3x = y + 9$$

 $3x = 3x$
 $-2y = y + 9 \quad | -y$
 $-3y = 9 \quad | :(-3)$
 $\underline{y = -3}$

 in I: $3x - 6 = 0 \quad | +6$
 $3x = 6 \quad | :3$
 $\underline{x = 2}$

 Probe in II: $6 + 3 = 9$
 $9 = 9 \checkmark$

 $L = \{(2|-3)\}$

2.4 GRAPHISCHES LÖSUNGSVERFAHREN



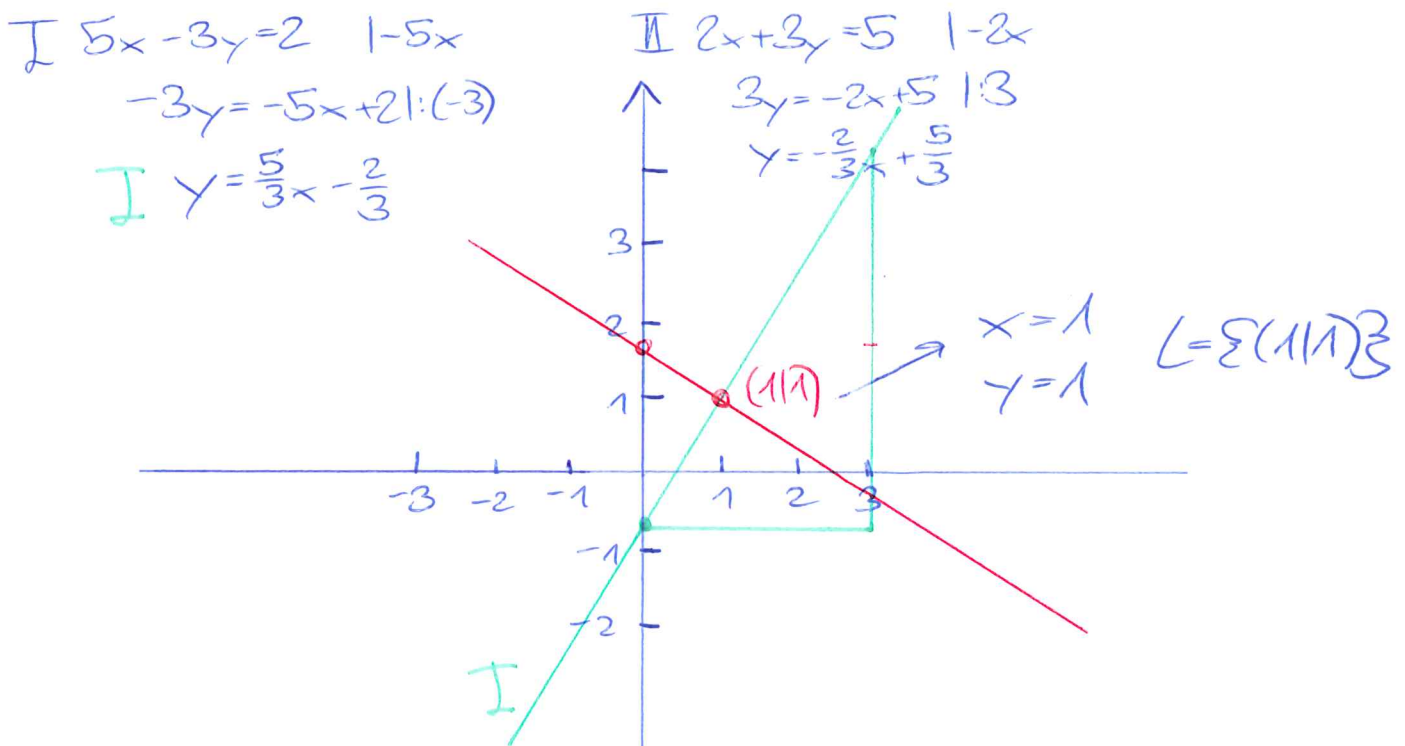
Video 6/9

$: 2x + 3y = 6$ $: x - y = -7$	
<p>1) Forme beide Gleichungen auf die Form $y = k \cdot x + d$ um und zeichne die beiden Graphen</p>	$: y = -\frac{2}{3}x + 2$ $: y = x + 7$
<p>2) Ermittle die Lösungsmenge:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1 Lösung: Es gibt einen Schnittpunkt Unendlich viele Lösungen: Die beiden Geraden sind ident. Keine Lösung: Die Geraden verlaufen parallel. 	$S = (-3 4)$ $x = -3 \quad \& \quad y = 4$

Bsp. 9 Löse das Gleichungssystem graphisch.

$$|: 5x - 3y = 2$$

$$||: 2x + 3y = 5$$



3. LÖSUNGSMÖGLICHKEITEN EINES LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMS



Die Lösungen eines linearen Gleichungssystem sind alle Zahlenpaare $(x|y)$, die beide Gleichungen erfüllen.

- **Eine Lösung:** 1 Zahlenpaar
- **Keine Lösung:** kein einziges Zahlenpaar
- **Unendlich viele Lösungen:** unendlich viele Zahlenpaare

Video 7/9

	1. Fall genau 1 Lösung	2. Fall keine Lösung	3. Fall unendlich viele Lösungen
Beispiel:	$I: y = 0,5x + 1$ $II: y + 3x = 8$ Lineare unabhängige Gleichungen	$I: 2y - x = 2$ $II: 2y - x = 4$ <u>widersprüchlich</u>	$I: 2y - x = 2$ $II: 4y - 2x = 4$ I ist ein Vielfaches von II (linear abhängig)
Einsetzungs-, Additions- und Gleichsetzungsverfahren	$x = 2$ und $y = 2$	Falsche Aussage wie z.B. $0 = 2$	Eine wahre Aussage wie z.B. $0 = 0$
Graphisches Verfahren:			
Lösungen:	Genau eine Lösung: $x = 2$ und $y = 2$	Keine Lösung	Unendlich, viele Lösungen z.B. $(0 1)$; $(2 2)$; $(4 3)$; ...
Lösungsmenge:	$L = \{(2 2)\}$	$L = \{\}$	$L = \{(x y) 2y - x = 2\}$

Vorgehensweise – Lösungsfälle bestimmen

1. Fall (1 Lösung): Die Variablen x und y sind keine Vielfachen voneinander. D.h. egal mit welchen Zahlen die Gleichungen ein-multipliziert werden, die Variablen x und y sind in beiden Gleichungen immer verschieden.

2. Fall (Keine Lösung): Die Variablen x und y müssen bei beiden Gleichungen entweder ident oder Vielfache voneinander sein. Wichtig ist, dass die Lösungszahlen bei den Gleichungen keine Vielfache sind!

3. Fall (Unendlich Viele Lösungen): Die beiden Gleichungen sind Vielfache voneinander. Der Unterschied zum 2. Fall ist, dass nun auch die Lösungszahlen auch übereinstimmen müssen!



Video 8/9

Bsp. 10) Wie viele Lösungen treten bei folgenden Gleichungssystemen auf? (Du brauchst die Lösungsfälle nicht berechnen!)

$: 2x + 3y = 7$ $: 3x + 6y = 9$ <i>0,5 02</i> \Rightarrow 1 Lösung	$: 2x + 3y = 7$ $: 4x + 6y = 14$ <i>02 02 02</i> Unendlich v. L.	$: 6x + 12y = 7$ $: 3x + 6y = 3$ <i>02 02 +2</i> Keine L.
$: -3x - 2y = -9$ $: 3x + 2y = 9$ Unendlich v. L.	$: -4x - 5y = 3$ $: -8x + 10y = 2$ 1 Lösung	$: -4x - 3y = 7$ $: -8x - 6y = 14$ Unendlich v. L.

Bsp. 11) Vervollständige so, dass der gewünschte Lösungsfall eintritt. Gib an, welche Bedingungen für die gegebenen Variablen gelten müssen.

1 Lösung	Keine Lösung	Unendlich viele Lösungen
$\begin{aligned} & \cdot 3 \left(\begin{array}{l} : 2x + 3y = 7 \quad \uparrow : 3 \\ : 6x + cy = 9 \end{array} \right) \\ & C \neq 9 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \cdot (-3) \left(\begin{array}{l} : x - 2y = 3 \\ : -3x + 6y = d \end{array} \right) \\ & d \neq -9 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & : x + 2y = 7 \\ & : 4x + 8y = d \\ & d = 28 \end{aligned}$
$\begin{aligned} & \cdot (-4) \left(\begin{array}{l} : 3x + cy = 2 \quad \uparrow : (-4) \\ : -12x + 3y = d \end{array} \right) \\ & C \neq -\frac{3}{4} \\ & d \text{ beliebig} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \cdot (-4) \left(\begin{array}{l} : 4x + 5y = 3 \quad \uparrow : (-4) \\ : cx - 20y = d \end{array} \right) \\ & C = -16 \\ & d \neq -12 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \cdot (-2) \left(\begin{array}{l} : 7x + cy = 19 \\ : -14x + 4y = d \end{array} \right) \\ & C = -2 \\ & d = 38 \end{aligned}$
$\begin{aligned} & \cdot 5 \left(\begin{array}{l} : cx - 10y = -10 \quad \downarrow : 5 \\ : 3x - 2y = d \end{array} \right) \\ & C \neq 15 \\ & d \text{ beliebig} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \cdot (-4) \left(\begin{array}{l} : cx - 8y = 16 \quad \downarrow : (-4) \\ : 4x + 2y = d \end{array} \right) \\ & C = -16 \\ & d \neq -4 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \cdot (-6) \left(\begin{array}{l} : cx - 6y = 12 \quad \downarrow : (-6) \\ : 4x + y = d \end{array} \right) \\ & C = -24 \\ & d = -2 \end{aligned}$
$\begin{aligned} & \cdot 5 \left(\begin{array}{l} : 2x + cy = -1 \quad \uparrow : 5 \\ : 10x + 5y = d \end{array} \right) \\ & C \neq 1 \quad d \text{ beliebig} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \cdot (-13) \left(\begin{array}{l} : -13x + cy = d \\ : x - 2y = -3 \end{array} \right) \\ & C = 26 \\ & d \neq 39 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \cdot (-6) \left(\begin{array}{l} : -12x + 18y = 60 \\ : 2x + cy = d \end{array} \right) \\ & C = -3 \\ & d = -10 \end{aligned}$



Video 9/9

Bsp. 12) Welches Lösungsverfahren bietet sich am besten an? Löse das Gleichungssystem und gib die Lösungsmenge an.

<p>Verfahren: <u>ADDITION</u></p> $\begin{aligned} & : 4x + 6y = 14 \quad \cdot 3 \\ & : -3x + 5y = -1 \quad \cdot 4 \\ & \underline{12x + 18y = 42} \\ & \underline{-12x + 20y = -4} \\ & 38y = 38 \\ & \underline{y = 1} \\ & \text{in I: } 4x + 6 \cdot 1 = 14 - 6 \\ & 4x = 8 \\ & \underline{x = 2} \\ & \text{Probe II: } -6 + 5 = -1 \\ & -1 = -1 \checkmark \\ & L = \{ (2 1) \} \end{aligned}$	<p>Verfahren: <u>Einsetzungsverfahren</u></p> $\begin{aligned} & : 6x - 2y = -2 \\ & : y = -3x - 1 \\ & \text{I: } 6x - 2 \cdot (-3x - 1) = -2 \\ & 6x + 6x + 2 = -2 \\ & 12x = -4 \quad : 12 \\ & \underline{x = -\frac{1}{3}} \\ & \text{II } y = 1 - 1 = 0 \\ & \text{Probe in I: } 6 \cdot (-\frac{1}{3}) - 2 \cdot 0 = -2 \\ & -2 = -2 \checkmark \\ & L = \{ (-\frac{1}{3} 0) \} \end{aligned}$	<p>Verfahren: <u>Gleichsetzungsverfahren</u></p> $\begin{aligned} & : -7x - y = -12 \Rightarrow -7x = y - 12 \\ & : -7x = 8 - 3y \\ & -7x = -7x \\ & y - 12 = 8 - 3y \quad +3y, +12 \\ & 4y = 20 \\ & \underline{y = 5} \\ & \text{in I: } -7x - 5 = -12 \\ & -7x = -7 \quad : (-7) \\ & \underline{x = 1} \\ & \text{Probe in II: } -7 = 8 - 15 \\ & -7 = -7 \checkmark \\ & L = \{ (1 5) \} \end{aligned}$
--	--	---