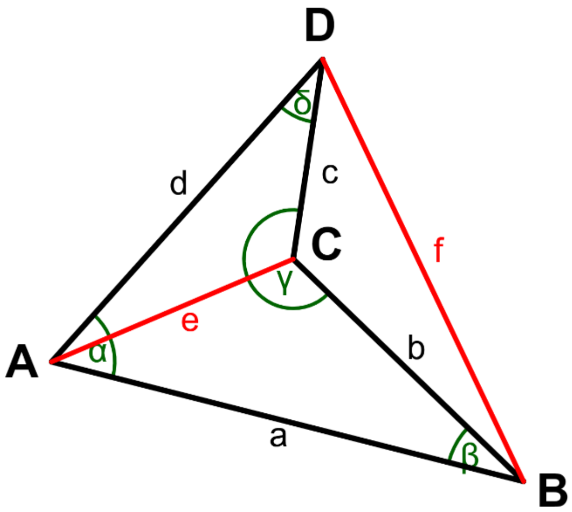
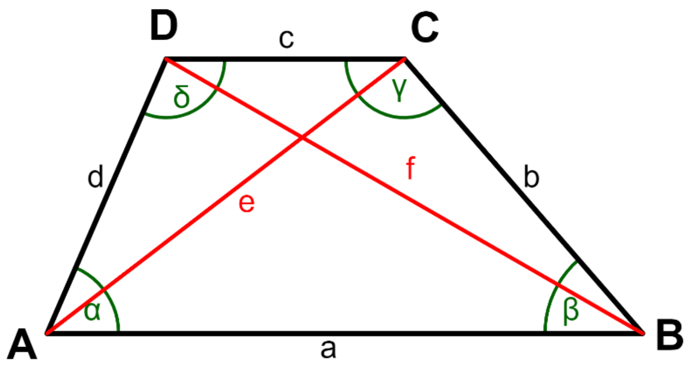
Vierecke
Eigenschaften & Konstruktionen

SKRIPT (9 Seiten)

Eigenschaften und Konstruktionen zu **folgenden Vierecken**:

- **Allgemeines Viereck**
- **Rechteck und Quadrat**
- **Allgemeines Parallelogramm**
- **Raute (=Gleichseitiges Parallelogramm)**
- **Allgemeines Trapez**
- **Gleichschenkliges und Rechtwinkliges Trapez**
- **Deltoid**





Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

-> **QR-Codes** im SKRIPT!

Prof. Tegischer

Allgemeine Informationen zum Skript

Anwendung des Materials:

Im Skript werden die zu erlernenden Inhalte stets durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung.

YouTube-Playlist
(PDF-Datei: KLICKEN!)

Die **Musterlösungen** findest du (sofern bereits verfügbar) kostenlos auf meiner Homepage unter folgendem Link: https://prof-tegischer.com/03-vierecke-eigenschaften-konstruktionen/

Einsatz des Materials

- Einsatz für **Lehrpersonen** als Aufwertung für den eigenen Unterricht („**Flipped Classroom**", **Erarbeitung** oder **Festigung** des **Stoffes** anhand des Skriptes, **Einsatz** der **Lernvideos**, etc.)
- Möglichkeiten für **SchülerInnen**: Selbstständiges Erarbeiten bzw. Festigen eines Stoffgebietes mit dem **Skript** (inkl. Videos & Musterlösungen).
- & noch viele weitere Möglichkeiten – wenn du eine besondere Idee hast, lass es mich wissen!! 😊

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. Alle **Aufgaben** wurden von mir erstellt.
- Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.
- Die Konstruktionen (Dreiecke) wurden von mir mit „GeoGebra" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Hast du Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, kannst du mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com findest du weitere Informationen zu meinen Materialien. Über ein Feedback zu den Unterlagen würde ich mich freuen!

Vierecke – Eigenschaften & Konstruktionen

1. Allgemeines Viereck

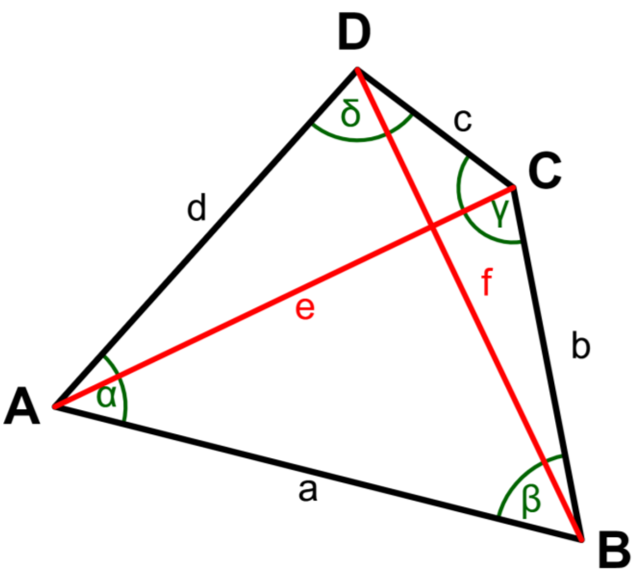
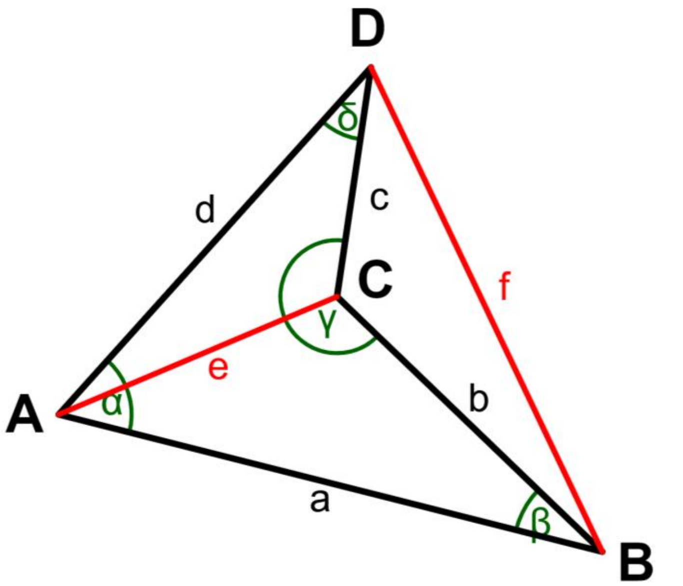
Video 1/8

Ein allgemeines Viereck hat keine besonderen Eigenschaften. Es werden dabei vier beliebig gewählte Eckpunkte verbunden.

Beschriftung:

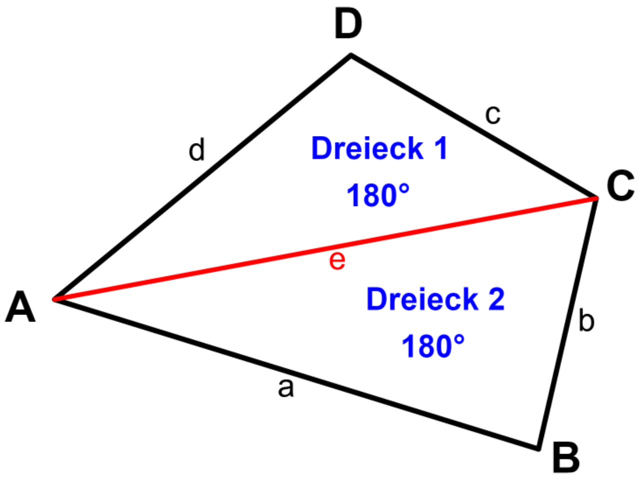
- Eckpunkte: Großbuchstaben (z.B.: A,B,C,D)
- Seiten und Diagonalen: Kleinbuchstaben (z.B.: Seiten: a,b,c,d – Diagonalen: $e = \overline{AC}, f = \overline{BD}$)
- Winkel: Griechische Buchstaben (z.B.: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$)

Beim allgemeinen Viereck müssen zwei Fälle unterschieden werden:

<table>
<tr><th>Konvexes Viereck</th><th>Konkaves Viereck</th></tr>
<tr><td>Liegen beide Diagonalen innerhalb des Vierecks, so nennt man es konvexes Viereck. Alle Innenwinkel sind kleiner oder gleich 180°.

</td>
<td>Liegt eine der beiden Diagonalen außerhalb des Vierecks, so nennt man es konkaves Viereck. Dies passiert, wenn ein Innenwinkel größer als 180° ist.

</td></tr>
</table>

Winkelsumme eines Vierecks:

Bei beiden Varianten kann das Viereck jeweils in zwei Dreiecke unterteilt werden. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°. Die Winkelsumme von zwei Dreiecken, die der Winkelsumme im Viereck entspricht, beträgt nun **360°**.



Winkelsumme im Viereck

360°

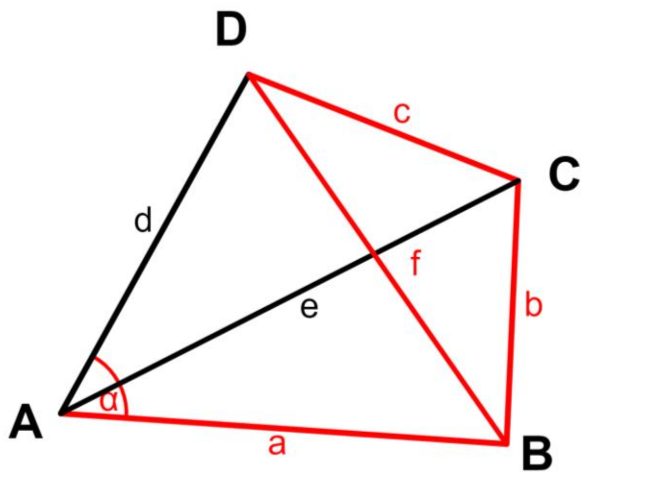
Konstruktion eines allgemeinen Vierecks:

Für die Konstruktion eines allgemeinen Vierecks benötigt man **fünf Bestimmungsstücke**, wobei **mindestens eine Seite** gegeben sein muss!

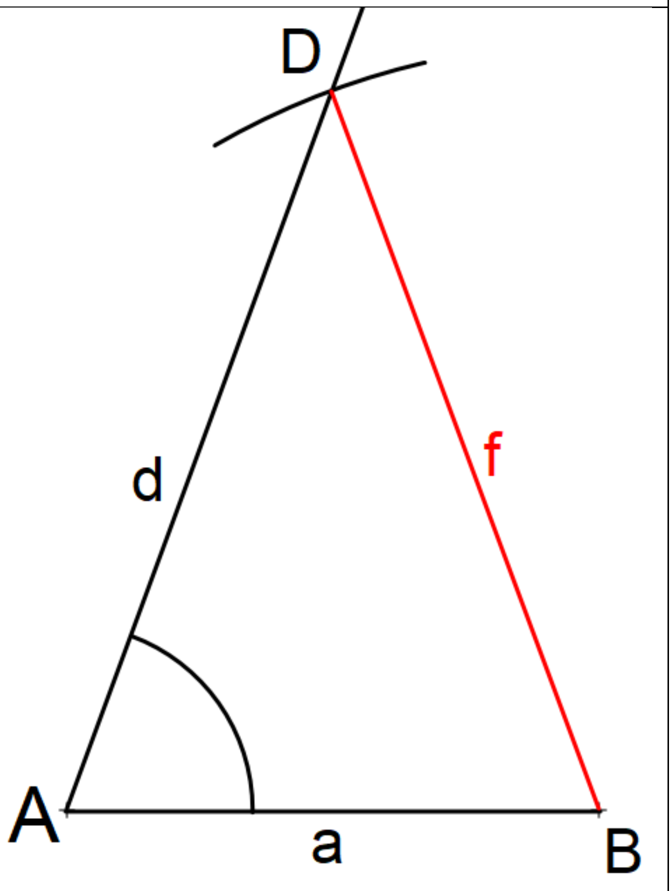
Bei der Vierecks-Konstruktion muss man **Schritt-für-Schritt** vorgehen. In den meisten Fällen wird das Viereck in zwei Dreiecke unterteilt und die **Konstruktion beginnt** mit einer **Dreieckskonstruktion** (SSS, SWS, WSW, SSW). Der finale Schritt (letzter Eckpunkt) funktioniert individuell je nach gegebenen Größen.

<table>
<tr><td colspan="2">Konstruiere das Viereck mit den Größen
$a = 6{,}5\ cm; b = 4{,}8\ cm; c = 5{,}5\ cm; f = 9\ cm, \alpha = 70°$</td></tr>
<tr><td>Skizze & Überlegungen: Mache eine Skizze. Markiere die gegebenen Größen und überlege dir einen Konstruktionsplan.

Konstruktionsplan:
1] Ich beginne mit der Dreieckskonstruktion ABD und verwende den SSW-Satz. Da die längere Seite (=Diagonale f) dem gegebenen Winkel gegenüberliegt, ist das Dreieck eindeutig konstruierbar.

2] Um den Eckpunkt C zu erhalten, schlage ich die beiden Seiten b und c mit dem Zirkel ab.</td><td></td></tr>
<tr><td>Schritt 1: Konstruktion des Dreiecks ABD mit dem SSW-Satz.

1] Seite a zeichnen
2] Winkel α messen und einen langen Strahl zeichnen
3] Diagonale f mit dem Zirkel abschlagen.

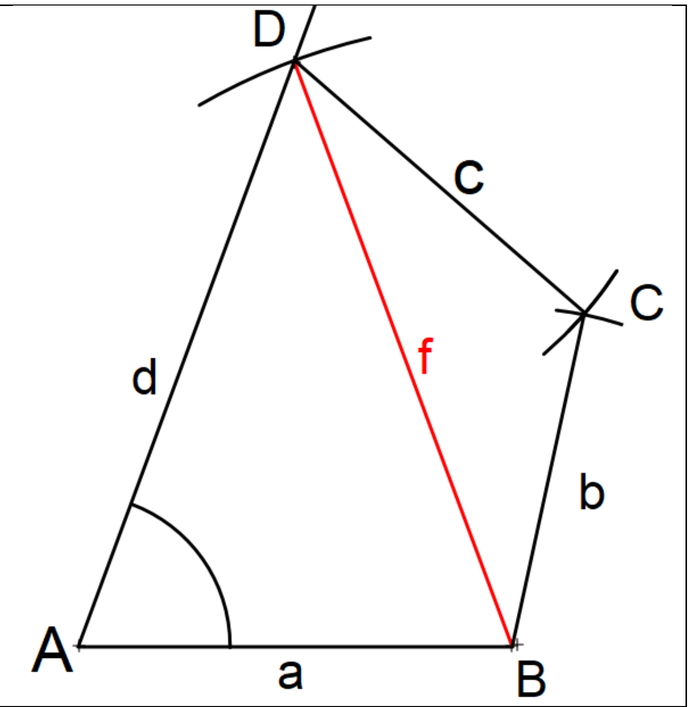
Der Schnittpunkt entspricht dem Eckpunkt D.</td><td></td></tr>
</table>

Schritt 2:

1] Seite b vom Eckpunkt B mit dem Zirkel abschlagen
2] Seite c vom Eckpunkt D mit dem Zirkel abschlagen

Der Schnittpunkt entspricht dem Eckpunkt C.

Dieser Schritt entspricht der Dreieckskonstruktion BCD mit dem **SSS-Satz**.



Bsp. 1) Von einem Viereck sind drei Winkel gegeben. Berechne den fehlenden Winkel.

a. $\beta = 20°, \gamma = 111°, \delta = 70°$
b. $\alpha = 166°, \beta = 14°, \gamma = 99°$
c. $\alpha = 100°, \gamma = 100°, \delta = 100°$
d. $\alpha = 45°, \beta = 88°, \delta = 177°$

Bsp. 2) Konstruiere das Viereck. Mache zuerst eine Skizze und mache dir einen Plan, wie du das allgemeine Viereck konstruieren kannst.

a. $a = 6{,}9\ cm; b = 4{,}9\ cm; c = 5{,}8\ cm; e = 8\ cm, \alpha = 66°$

b. $a = 7\ cm; b = 5\ cm; c = 6\ cm; f = 8{,}2\ cm, \alpha = 90°$

c. $a = 6{,}4\ cm; b = 4\ cm;\ \alpha = 80°; \beta = 83°;\ \gamma = 120°$

d. $d = 5{,}2\ cm; e = 8{,}8\ cm; f = 6{,}9\ cm, \alpha = 77°; \delta = 120°$

e. $b = 7{,}8\ cm; c = 5{,}2\ cm; d = 6{,}6\ cm; \gamma = 101°; \delta = 123°$

f. $a = b = 5{,}2\ cm; c = 4{,}4cm; d = 6{,}4\ cm, \beta = 77°$

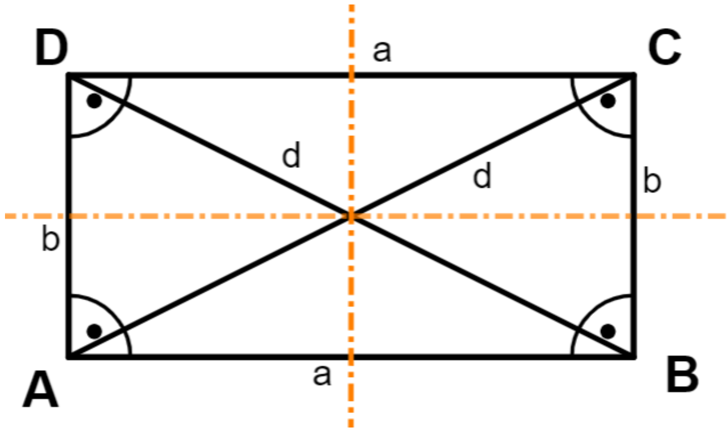
Bsp. 3) Zeichne ein beliebiges **konkaves** Viereck und beschrifte es vollständig. Miss die Innenwinkel ab und addiere sie. Wie groß ist die Innenwinkelsumme bei diesem Viereck?

Bsp. 4) Von einem allgemeinen Viereck kennt man die Größen der Winkel $\beta = 20°, \gamma = 79°\ und$ $\delta = 70°$. Handelt es sich dabei um ein konkaves oder um ein konvexes Viereck? Begründe.

Bsp. 5) Gib **vier Punkte** in **Koordinaten-Schreibweise** an, sodass ein **konkaves** Viereck entsteht.

2. Rechteck

- Das **Rechteck** ist ein **besonderes Viereck**.
- Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel.
- Alle **Winkel** sind **rechte Winkel**.
- Die Diagonalen halbieren einander
- Die beiden **Seitensymmetralen** sind **Symmetrieachsen**.



- Der Mittelpunkt des Rechtecks ist zugleich der **Umkreismittelpunkt**. Jedes Rechteck besitzt einen Umkreis.

Umfang $u = 2 \cdot a + 2 \cdot b \text{ oder } u = 2 \cdot (a + b)$	**Flächeninhalt = Länge mal Breite** $A = a \cdot b$
$\boldsymbol{a} = (u - 2 \cdot b) : 2$ $\boldsymbol{b} = (u - 2 \cdot a) : 2$	$\boldsymbol{a} = A : b$ $\boldsymbol{b} = A : a$

Bsp. 6) Konstruiere das Rechteck mit den gegebenen Eigenschaften. Miss die fehlende Seite anschließend ab und berechne den Umfang bzw. Flächeninhalt.

a. $a = 6{,}9\ cm; d = 8cm$
b. $a = 8\ cm; d = 9\ cm$
c. $b = 5{,}1\ cm; d = 7{,}1\ cm$
d. $b = 7\ cm; d = 10\ cm$

Video 2/8

SCAN MICH

Bsp. 7) Berechne die fehlende Größe des Rechtecks mit Hilfe von **Äquivalenzumformungen**.

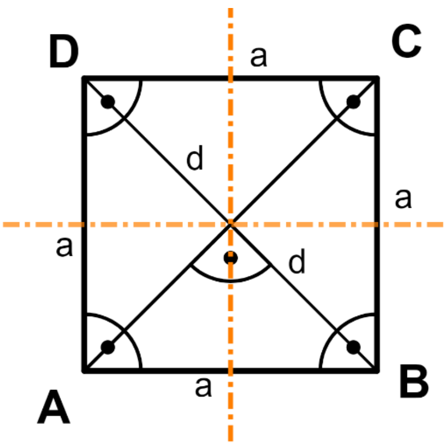
a. $a = 10\ cm; u = 60\ cm$
b. $b = 100\ cm; u = 1000\ cm$
c. $b = 8\ cm; A = 40\ cm^2$
d. $a = 15\ cm; A = 300\ cm^2$

Video 3/8

SCAN MICH

3. Quadrat

- Das **Quadrat** ist ein **besonderes Viereck**.
- Alle vier Seiten sind gleich lang. Alle Winkel sind rechte Winkel (90°).
- Die Diagonalen halbieren einander und stehen normal aufeinander.
- Die beiden **Seitensymmetralen** sind **Symmetrieachsen**.
- Der **Mittelpunkt** entspricht dem Inkreis- und Umkreismittelpunkt.



Umfang: $u = 4 \cdot a$

Flächeninhalt: $A = a \cdot a$

Bsp. 8) Konstruiere das Quadrat mit der gegebenen Eigenschaft (inkl. Streckensymmetrale). Miss die fehlenden Seiten ab und berechne den Umfang bzw. Flächeninhalt.

a. $d = 7\ cm$

b. $d = 10\ cm$

c. $d = 8{,}8\ cm$

d. $d = 6\ cm$

Bsp. 9) Zeichne je ein beliebiges Rechteck und Quadrat. Zeichne (falls möglich) den Inkreis und Umkreis ein. Markiere die Radien.

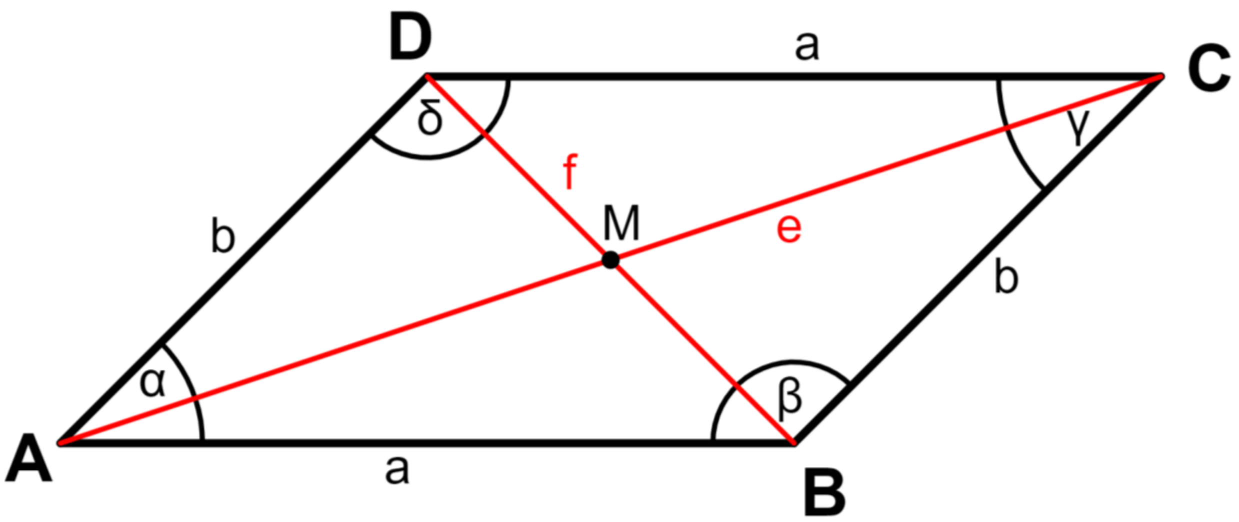
Video 4/8

4. Allgemeines Parallelogramm

- Gegenüber liegende Seiten sind **gleich lang** und **parallel**.

$$\overline{AB} = \overline{CD}, AB \mid\mid CD$$
$$\overline{BC} = \overline{AD}, BC \mid\mid AD$$

- Gegenüber liegende Winkel sind **gleich groß**: $\alpha = \gamma;\ \beta = \delta$
- Anliegende Winkel sind **supplementär**:
  - $\alpha + \beta = 180°;\ \beta + \gamma = 180°;\ \gamma + \delta = 180°;\ \alpha + \delta = 180°$
- Die Diagonalen halbieren einander: $\overline{AM} = \overline{MC}$ $\quad und \quad$ $\overline{BM} = \overline{MD}$



Bsp. 10) Konstruiere das allgemeine Parallelogramm. Zeichne eine Skizze und überlege, wie du das Parallelogramm konstruieren kannst.

a. $a = 6{,}9\ cm; b = 4\ cm, \alpha = 44°$

b. $a = 8\ cm; b = 6\ cm, \beta = 110°$

c. $a = 5{,}5\ cm; b = 4\ cm, e = 7\ cm$

d. $a = 7\ cm; b = 4\ cm, f = 7\ cm$

e. $b = 6{,}5\ cm, e = 8\ cm, f = 6\ cm$

f. $a = 6\ cm, e = 7{,}2\ cm, f = 4{,}8\ cm$

Bsp. 11) Konstruiere das allgemeine Parallelogramm. Mache zuerst eine Skizze. Berechne den **Flächeninhalt**. Miss benötigte Größen dazu ab. (Tipp: Wenn du die Formel noch nicht kennst: Unterteile das Parallelogramm in zwei rechtwinklige Dreiecke und ein Rechteck).

a. $a = 7\ cm; b = 4{,}8\ cm, \alpha = 66°$

b. $a = 9{,}9\ cm; b = 8\ cm, \beta = 143°$

c. $a = 6{,}8\ cm; b = 5{,}1\ cm, e = 9\ cm$

Bsp. 12) Das gegebene Grundstück hat die Form eines Parallelogramms. Konstruiere das Grundstück im Maßstab **1:5000** und berechne den Umfang u des Grundstückes in der Wirklichkeit.

a. $a = 350\ m; b = 300\ m, e = 450\ m$

5. Gleichseitiges Parallelogramm (=Raute)

Video 5/8

SCAN MICH

- Alle Seiten sind **gleich lang**. Gegenüberliegende Seiten sind **parallel**.

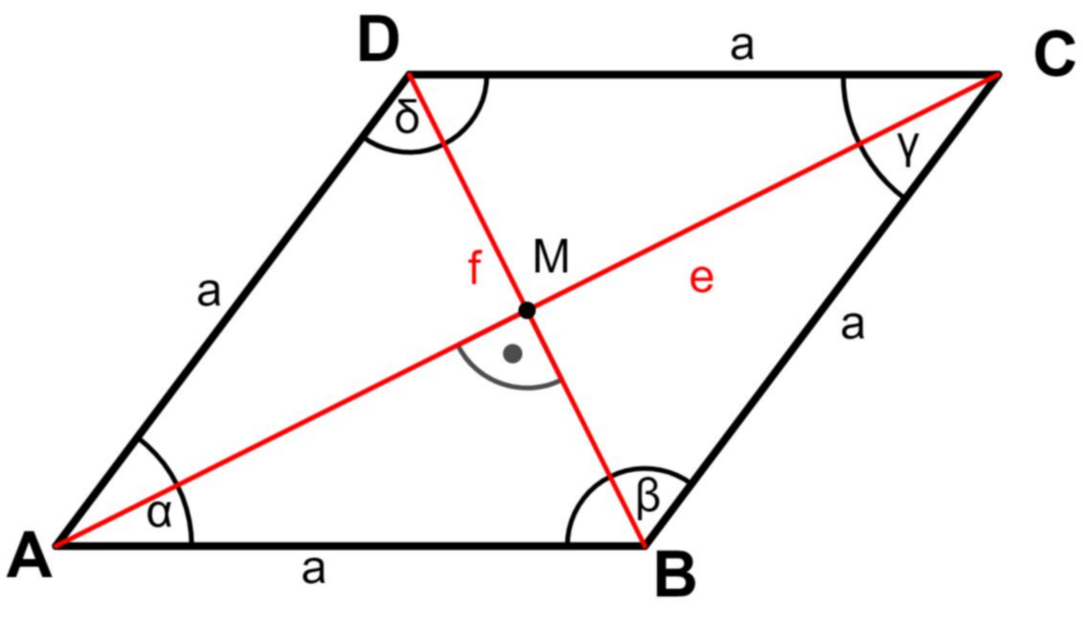
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$$
$$AB \parallel CD \quad \& \quad BC \parallel AD$$

- Die Diagonalen stehen **normal** aufeinander und **halbieren einander**:

$$\overline{AM} = \overline{MC} \quad und \quad \overline{BM} = \overline{MD}$$
$$e \perp f$$

- Die Diagonalen halbieren die Innenwinkel.
- Die Diagonalen bilden die beiden Symmetrieachsen. Der Schnittpunkt M der Diagonalen ist der **Inkreismittelpunkt**.
- Die Dreiecke ABC und ACD sind **kongruent**.
- Gegenüber liegende Winkel sind **gleich groß**: $\alpha = \gamma;\ \beta = \delta$
- Anliegende Winkel sind **supplementär**:

$$\alpha + \beta = 180°;\ \beta + \gamma = 180°;\ \gamma + \delta = 180°;\ \alpha + \delta = 180°$$



Bsp. 13) Konstruiere die Raute. Mache zuerst eine Skizze und überlege deine Vorgehensweise.

a. $a = 7\ cm; \alpha = 60°$

b. $a = 8\ cm; \beta = 144°$

c. $e = 8\ cm; f = 6\ cm$

d. $e = 120\ mm; f = 80\ mm$

Bsp. 14) Konstruiere die Raute mit $a = 6\ cm\ und\ \alpha = 33°$. Mache zuerst eine Skizze. Konstruiere die Winkelsymmetralen bei allen vier Winkeln. Schneiden die Winkelsymmetralen einander in einem Punkt? Welchen speziellen Kreis kannst du konstruieren? Zeichne den Radius ein.

Bsp. 15) Konstruiere die Raute. Mache zuerst eine Skizze und überlege deine Vorgehensweise.

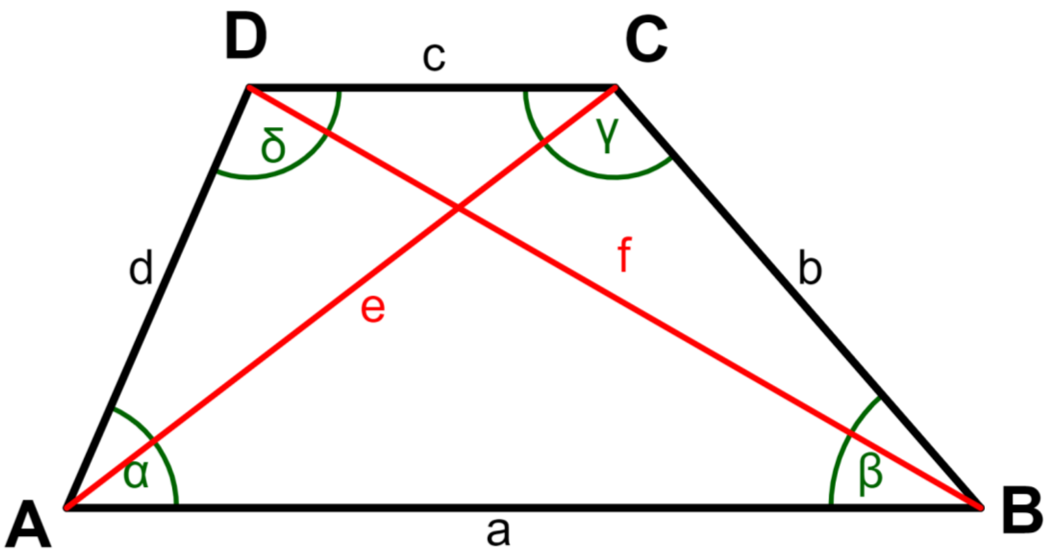
a. $f = 6\ cm; \beta = 110°$

b. $e = 10\ cm; \alpha = 50°$

6. Allgemeines Trapez

Video 6/8

- Zwei Seiten sind parallel: $a||\ c$
- Nicht parallele Seiten heißen Schenkel: b,d
- Winkel, die an einem Schenkel anliegen, sind supplementär: $\alpha + \delta = 180°\ und\ \beta + \gamma = 180°$.



Bsp. 16) Konstruiere das allgemeine Trapez. Zeichne eine Skizze und überlege, wie du das Trapez konstruieren kannst.

a. $a = 7{,}3\ cm; d = 4\ cm, \alpha = 70°, \beta = 76°$

b. $a = 8{,}1\ cm; b = 5{,}2\ cm; c = 4\ cm;\ \beta = 80°$

c. $a = 6{,}3\ cm; b = 4\ cm; e = 8\ cm;\ f = 7\ cm$

d. $a = 5\ cm;\ c = 4{,}5\ cm; d = 4{,}3\ cm; \alpha = 81°$

e. $a = 85\ mm; b = 56\ mm; c = 24\ mm;\ d = 33\ mm$

Bsp. 17) Konstruiere das allgemeine Trapez und berechne anschließend den Flächeninhalt. Unterteile das Trapez in Rechtecke bzw. Rechtwinklige Dreiecke.

a. $a = 6,5\ cm; b = 5\ cm, \alpha = 64°, \beta = 70°$

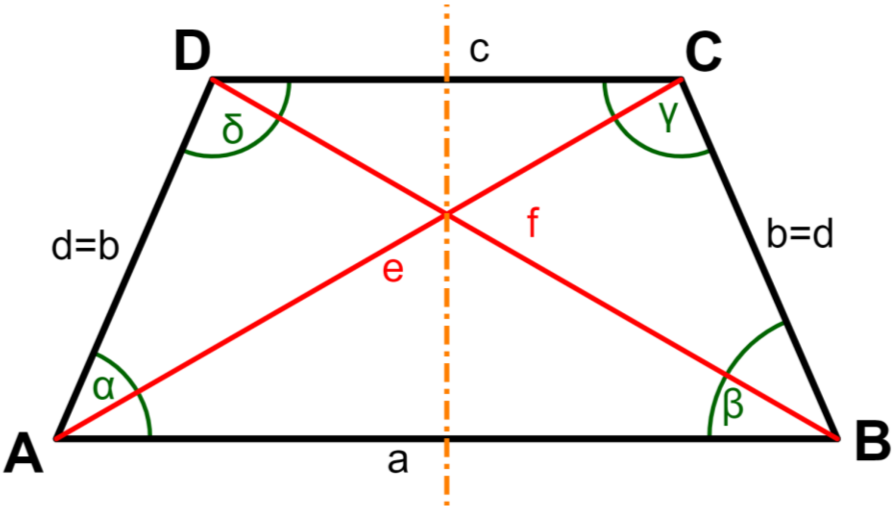
b. $a = 7,3\ cm; b = 4,8\ cm; e = 8,9\ cm;\ f = 7,5\ cm$

7. Rechtwinkliges und Gleichschenkliges Trapez

Video 7/8

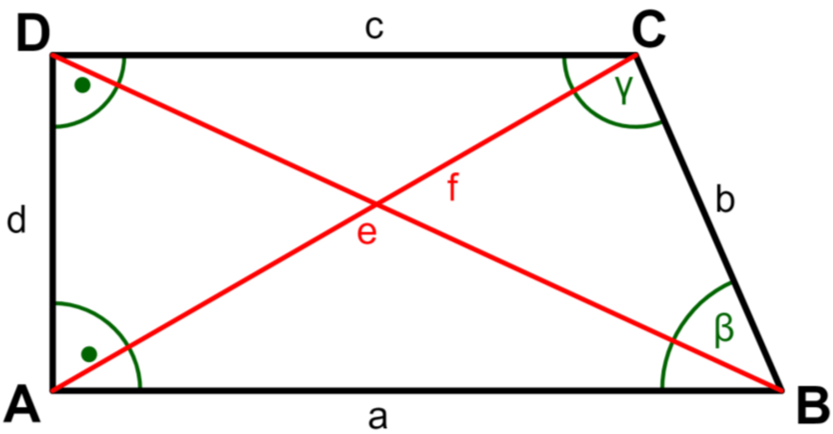
Gleichschenkliges Trapez

- Die beiden Schenkel sind gleich lang.
- Die Winkel an den Parallelseiten sind gleich groß.
- Die Symmetrieachse ist die Streckensymmetrale der Parallelseiten.
- Die Diagonalen sind gleich lang. Der Schnittpunkt liegt auf der Symmetrieachse.
- Jedes gleichschenklige Trapez besitzt einen **Umkreis**. Der **Umkreismittelpunkt** ist der Schnittpunkt der **Streckensymmetralen** der einzelnen Seiten.



Rechtwinkliges Trapez

- Die beiden Winkel, die einem Schenkel anliegen, sind 90°.



Bsp. 18) Konstruiere das gleichschenklige Trapez mit $b = d$. Mache zuerst eine Skizze. Konstruiere den Umkreis.

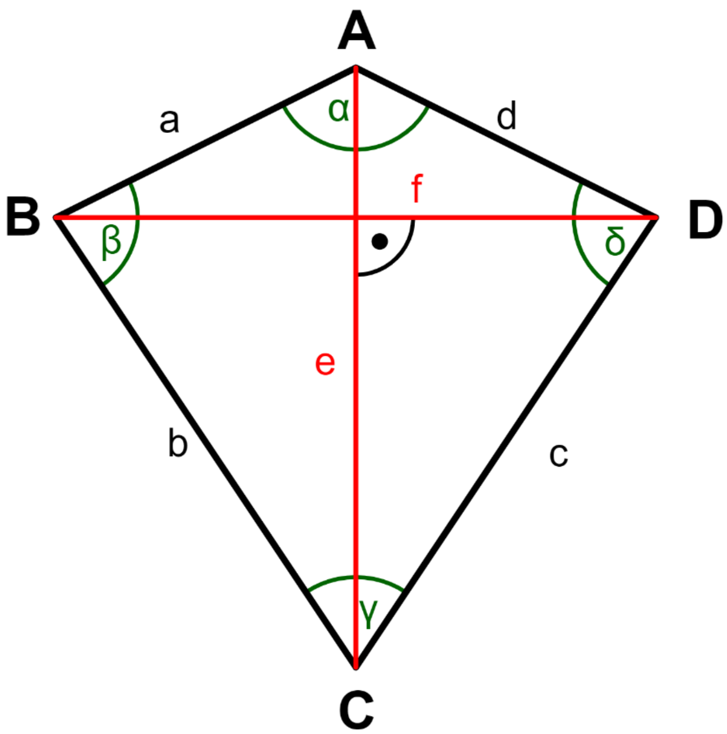
a. $a = 6,5\ cm; b = 5\ cm, \alpha = 64°$

b. $b = 4\ cm; c = 3,6\ cm, \gamma = \delta = 70°$

c. $a = 7,8\ cm;\ b = 4\ cm; e = 9\ cm$

8. Deltoid

Video 8/8



- Je zwei anliegende Seiten sind gleich lang: $a = d$ & $b = c$
- Die Diagonale e steht normal auf die Diagonale f. $e \perp f$
- Die Diagonale e halbiert f ($\overline{BM} = \overline{MD}$) und die beiden Winkel α und γ.
- e ist die Symmetrieachse.
- Die Winkel β und δ sind gleich groß.
- Jedes Deltoid besitzt einen **Inkreis**. Der Inkreismittelpunkt liegt auf der Diagonale e und ist der **Mittelpunkt** der **Winkelsymmetralen**.
  Bemerkung: Die Diagonale e liegt auf der Winkelsymmetralen von α und γ.

Bsp. 19) Konstruiere das Deltoid. Mache zuerst eine Skizze und überlege deinen Konstruktionsweg. Konstruiere im Anschluss den Inkreismittelpunkt und Inkreis. Gib die Größe des Winkels γ an.

a. $a = 4{,}1\ cm; b = 6{,}3\ cm, e = 9\ cm$

b. $a = 3{,}8\ cm; b = 7\ cm;\ f = 5{,}7\ cm$

c. $a = 5{,}1\ cm; b = 5{,}9\ cm; \beta = 133°$

d. $a = 3{,}4\ cm; e = 7\ cm; f = 5{,}1\ cm$

Bsp. 20) Zeichne das Deltoid ABCD in einem Koordinatensystem. Berechne den Flächeninhalt, indem du das Deltoid in vier rechtwinklige Dreiecke unterteilst.

a. $A = (6|9); B = (4|7); C = (8|7); D = (6|3)$

b. $A = (5|11); B = (2|8); C = (8|8); D = (5|1)$

Bsp. 21) Folgende Größen sind gegeben: $a = 52\ mm, b = 44\ mm, \alpha = 63°$.

Konstruiere mit dieser Angabe jeweils ein **gleichschenkliges Trapez**, ein **Deltoid** und ein **Parallelogramm**.