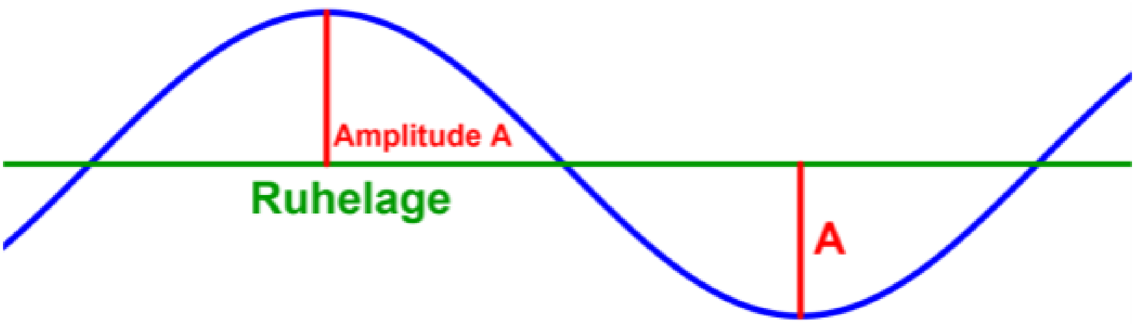
Die Winkelfunktionen

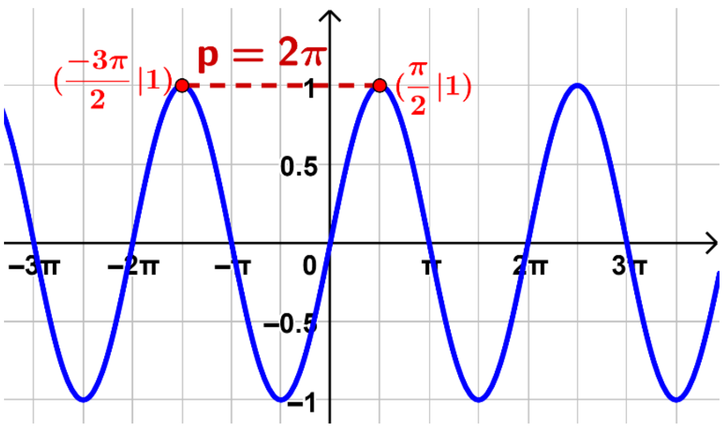
Sinus, Cosinus und Tangens

SKRIPT (17 Seiten)

Theoretische Erklärungen und Beispielaufgaben zu **folgenden Themenbereichen**:

- **Das Bogenmaß (Zusammenhang: Grad- und Bogenmaß)**
- **Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion (Einheitskreis, Eigenschaft, Funktionsgraph)**
- **Allgemeine Sinusfunktion**
- **Harmonische Schwingungen**





Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

-> **QR-Codes** im SKRIPT!

Prof. Tegischer

Allgemeine Informationen zum Skript

Anwendung des Materials:

Im Skript werden die zu erlernenden Inhalte stets durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung.

YouTube-Playlist
(PDF-Datei: KLICKEN!)

SCAN MICH

Die **Musterlösungen** findest du (sofern bereits verfügbar) kostenlos auf meiner Homepage unter folgendem Link: https://prof-tegischer.com/23-winkelfunktionen/

Einsatz des Materials

- Einsatz für **Lehrpersonen** als Aufwertung für den eigenen Unterricht („**Flipped Classroom**“, **Erarbeitung** oder **Festigung** des **Stoffes** anhand des Skriptes, **Einsatz** der **Lernvideos**, etc.)
- Möglichkeiten für **SchülerInnen**: Selbstständiges Erarbeiten bzw. Festigen eines Stoffgebietes mit dem **Skript** (inkl. Videos & Musterlösungen).
- & noch viele weitere Möglichkeiten – wenn du eine besondere Idee hast, lass es mich wissen!! 😊

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. Alle **Aufgaben** wurden von mir erstellt.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt.
- Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

Lizenzbedingungen:

Vielen Lieben Dank, dass du dich für mein Material entschieden hast. Ich würde mich freuen, wenn es dir bei der Unterrichtsgestaltung oder beim selbstständigen Erarbeiten helfen kann.

Du darfst das Material für **deinen eigenen Unterricht und deine eigenen Zwecke** verwenden.

Du darfst es NICHT gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Grafiken dürfen NICHT herauskopiert werden.

Hast du Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, kannst du mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (lukastegischer5@gmx.at). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com findest du weitere Informationen zu meinen Materialien. Ich würde mich über ein **Feedback** dazu freuen!

Die Winkelfunktionen

Video 1/7

Vorwissen aus der Unterstufe:

- Umfang eines Kreises: $u = 2r\pi$
- Länge eines Kreisbogens b mit Winkel α: $b = \frac{r\pi\alpha}{180}$

1. Ein weiteres Winkelmaß: Das Bogenmaß

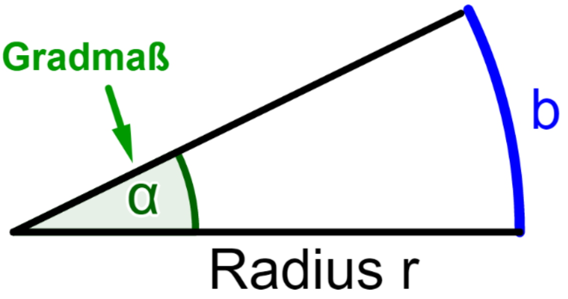
Bisher haben wir Winkel im **Gradmaß** gemessen. Ein rechter Winkel entspricht dabei 90°. Ein voller Winkel 360°. Wie der Name „Gradmaß" bereits sagt, werden die Winkel in der Einheit **Grad °** angegeben.

Definition (Bogenmaß)

Das Bogenmaß eines Winkels ist das Verhältnis der Länge des zum Winkel gehörigen Kreisbogens b und dessen Radius r:

$$\varphi = \frac{b}{r}$$

$$(Einheit: \boldsymbol{Radiant} - kurz: rad)$$

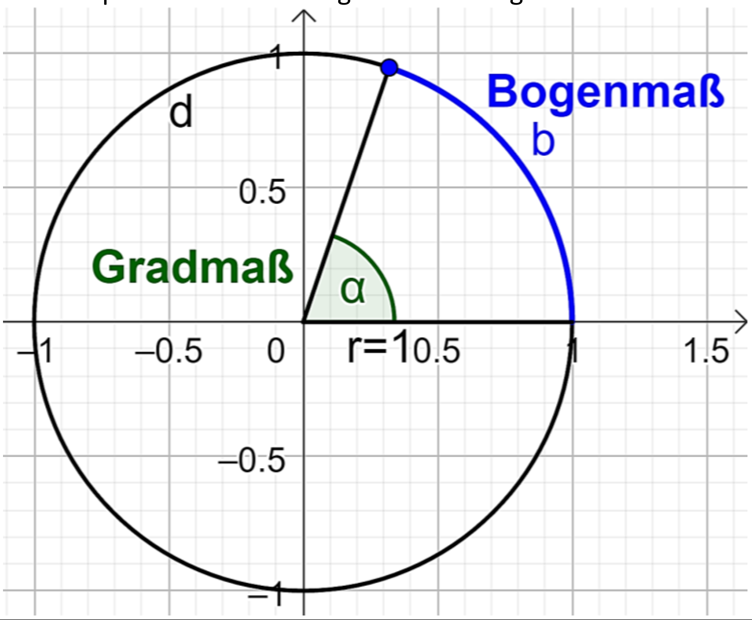


Zusammenhang: Gradmaß & Bogenmaß am Einheitskreis:

Beim Einheitskreis ist der Radius $r = 1$. Für die Berechnung des Kreisbogens gilt:

$$\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{1} = b$$

Im Einheitskreis entspricht somit die Länge des Kreisbogens dem Winkel im Bogenmaß!



Winkel im Bogenmaß = Länge des Kreisbogens am Einheitskreis

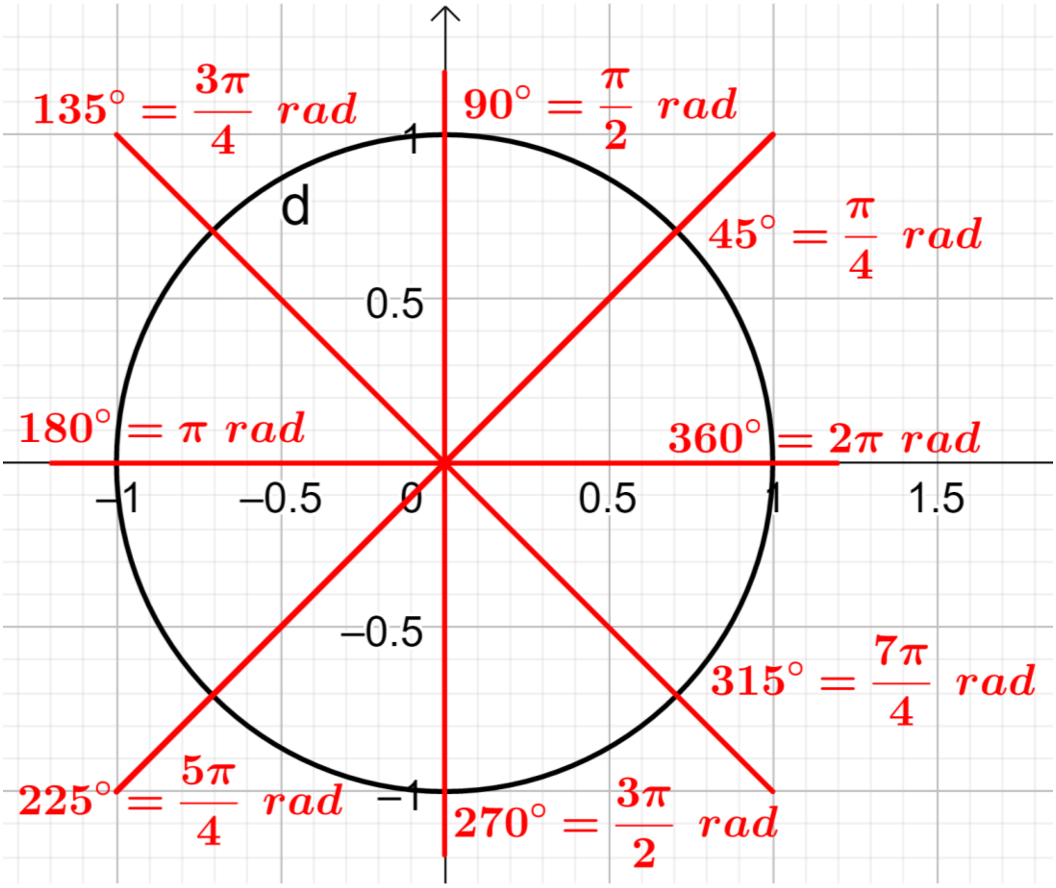
- Umfang des Kreisbogens: $u = 2r\pi = 2 \cdot 1 \cdot \pi = 2\pi$

$\boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{in}$ °)	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$225°$	$270°$	$315°$	$360°$
$\boldsymbol{\varphi}$ ($\boldsymbol{in\ rad}$)	$0\ rad$	$\frac{\pi}{4}\ rad$	$\frac{\pi}{2}\ rad$	$\frac{3\pi}{4}\ rad$	$\pi\ rad$	$\frac{5\pi}{4}\ rad$	$\frac{3\pi}{2}\ rad$	$\frac{7\pi}{4}\ rad$	$2\pi\ rad$

➔ Der Winkel 360° entspricht einem vollen Winkel bzw. dem gesamten **Kreisumfang**. Im Bogenmaß kann man den vollen Winkel mit 2π $(in\ rad)$ angeben [= gesamter Umfang].

➔ Der Winkel 90° entspricht einem Viertel von 360° -> es gilt: $\boldsymbol{\varphi} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ rad$

➔ Der Winkel 45° enstspricht der Hälfte von 90°. Es gilt: $\boldsymbol{\varphi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}\ rad$



Umrechnungen zwischen dem Grad- und Bogenmaß

Für die Umrechnungen gilt folgender Zusammenhang am Einheitskreis:

$$Kreisbogen\ b = \varphi\ rad = \frac{\pi \cdot \alpha°}{180}$$

Umrechnung Bogenmaß -> Grad: $\alpha° = \frac{180° \cdot \varphi}{\pi}$

Umrechnung Grad -> Bogenmaß: $\varphi = \frac{\pi \cdot \alpha°}{180°}$

Bsp. 1) Rechne das Gradmaß ins Bogenmaß um.

a. $\alpha = 0{,}8°$	b. $\alpha = 22°$	c. $\alpha = 49°$	d. $\alpha = 99°$
e. $\alpha = 134°$	f. $\alpha = 200°$	g. $\alpha = 300°$	h. $\alpha = 359{,}5°$

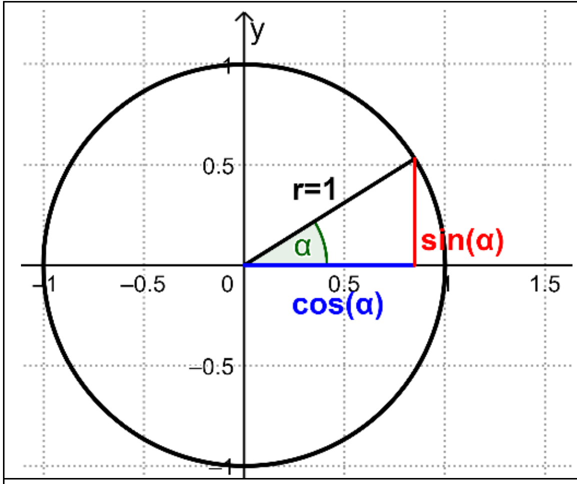
Bsp. 2) Rechne das Bogenmaß ins Gradmaß um.

a. $\varphi = 0{,}8\, rad$	b. $\varphi = 0{,}04\, rad$	c. $\varphi = 6\, rad$	d. $\varphi = 4\, rad$
e. $\varphi = 3{,}3\, rad$	f. $\varphi = 2{,}04\, rad$	g. $\varphi = 0{,}005\, rad$	h. $\varphi = 1{,}78\, rad$

2. Sinus, Cosinus- und Tangensfunktion

2.1 WH: Sinus, Cosinus und Tangens am Einheitskreis

Video 2/7

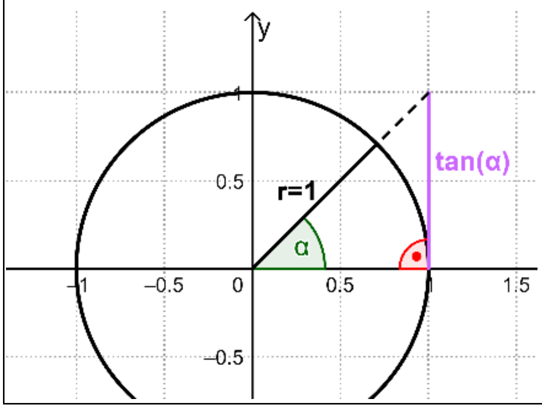


Zu jedem Punkt $P = (x|y)$ auf der Kreislinie des Einheitskreises kann man ein rechtwinkliges Dreieck einzeichnen. Da die Hypotenuse immer dem Radius mit der Länge 1 entspricht, gilt:

$$x = \mathbf{cos}(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{Ankathete}{1} = Ankathete$$

$$y = \mathbf{sin}(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{Gegenkathete}{1} = Gegenkathete$$

Für einen Punkt P gilt: $P = (x|y) = (\cos(\alpha)|\sin(\alpha))$



Im Punkt $(1|0)$ des Einheitskreises wird eine zur zweiten Achse **parallele Tangente** gelegt und der **Kreisradius** über P hinaus **verlängert**. Die Länge der Strecke von $(1|0)$ bis zum Schnittpunkt der verlängerten Hypotenuse mit der Tangente ist der **Tangenswert** des Winkels α:

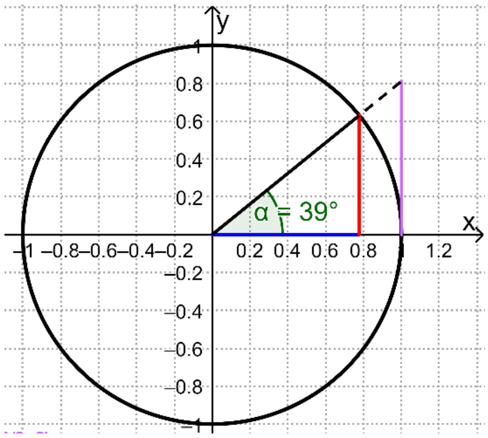
$$\mathbf{tan}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{Gegenkathete}{1} = Gegenkathete$$

Besondere Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					

Welchen Wertebereich nehmen Sinus, Cosinus und Tangens in den Quadranten an?

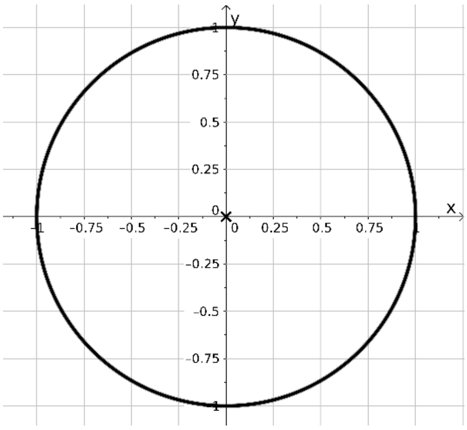
	1. Quadrant $0 < \alpha < 90°$	**2. Quadrant** $90 < \alpha < 180°$	**3. Quadrant** $180 < \alpha < 270°$	**4. Quadrant** $270 < \alpha < 360°$
$\sin\alpha$				
$\cos\alpha$				
$\tan\alpha$				



Bsp. 3) Gegeben ist der Einheitskreis. Welche Streckenlängen entsprechen dem Cosinus-, Sinus- und Tangenswert des Winkels? Markiere die Strecken mit unterschiedlichen Farben und bestimme die Werte.

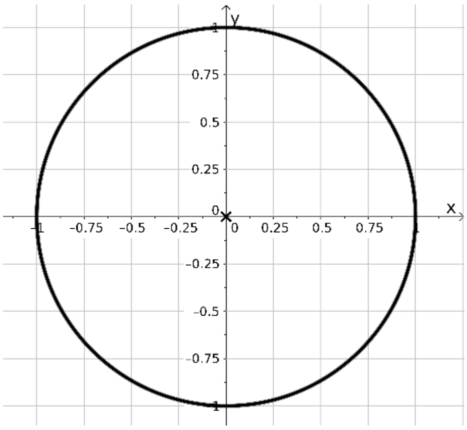
Bsp. 4) Zeichne in den **Einheitskreis** den gegebenen Winkel. Miss die **Werte** der **drei Winkelfunktionen** ab. Überprüfe mit Technologie.

$\alpha = 165\,°$



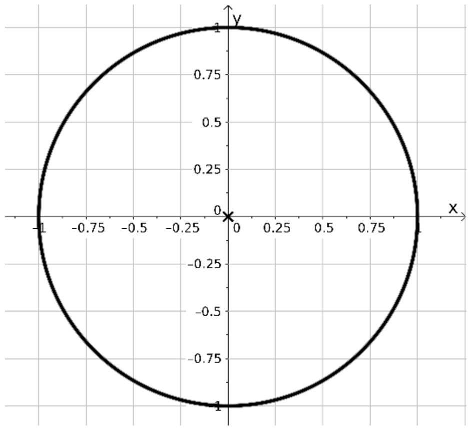
	gemessen	TR
sin(165 °)		
cos(165 °)		
tan(165 °)		

$\alpha = 206\,°$



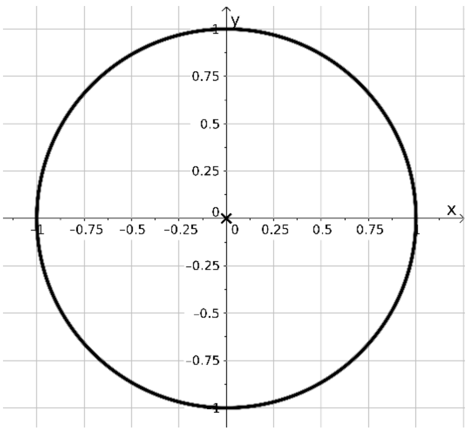
	gemessen	TR
sin(206 °)		
cos(206 °)		
tan(206 °)		

$\alpha = 330\,°$



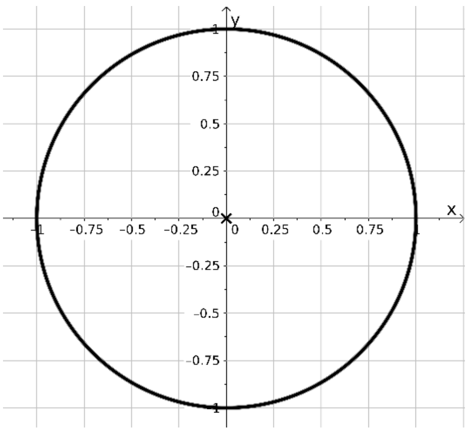
	gemessen	TR
sin(330 °)		
cos(330 °)		
tan(330 °)		

$\alpha = 20\,°$



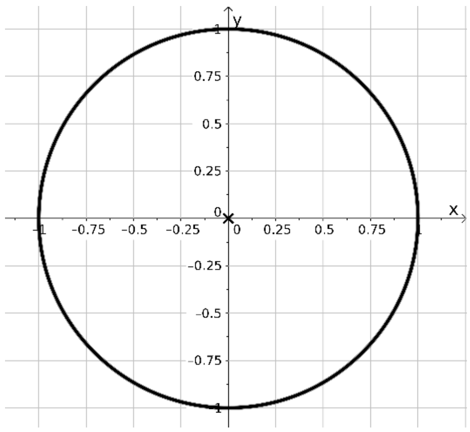
	gemessen	TR
sin(20 °)		
cos(20 °)		
tan(20 °)		

$\alpha = 211\,°$



	gemessen	TR
sin(211 °)		
cos(211 °)		
tan(211 °)		

$\alpha = 144\,°$



	gemessen	TR
sin(144 °)		
cos(144 °)		
tan(144 °)		

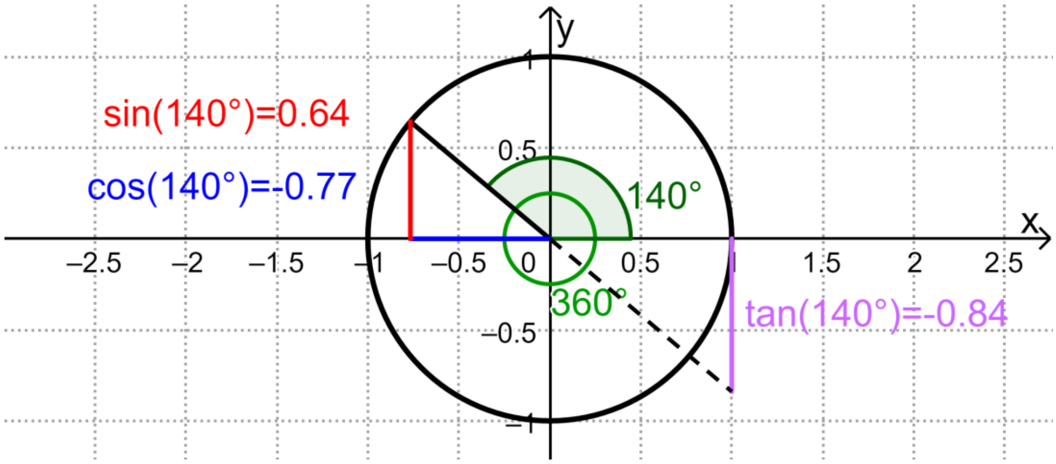
2.2 Erweiterung der Winkelfunktionen

In der fünften Klasse wurden bisher nur Winkelfunktion von 0° bis 360° betrachtet. In weiterer Folge möchten wir die Winkelfunktionen auf ganz $\mathbb{R}$ (für alle beliebig großen Winkel!) definieren. Es stellt sich nun die Frage, was man unter einem Winkel von $\alpha = 500°$ oder $\beta = -60°$ versteht?

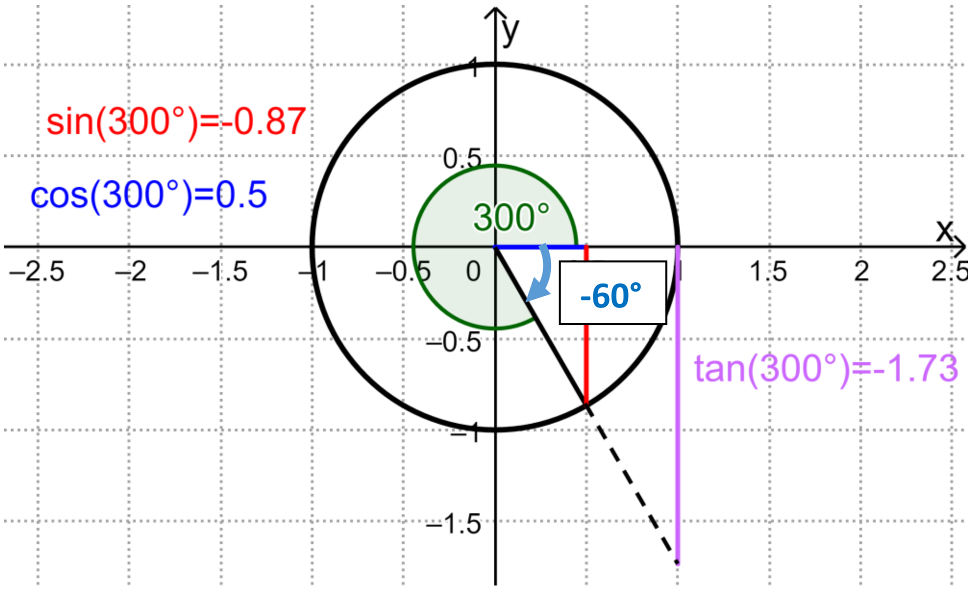
Wenn man sich die Bewegung eines Punktes P entlang des Einheitskreises vorstellt, so kann man dies mit Hilfe eines Winkels beschreiben:

- Bei 500° durchläuft der Punkt den Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn einmal komplett und bewegt sich anschließend noch um 140° weiter.

$$500° = 360° + 140°$$



- Bei -60° bewegt sich der Punkt um 60° im Uhrzeigersinn. Betrachtet man die Winkelfunktionen, so kann man -60° mit $\beta' = -60° + 360° = 300°$ darstellen.



- Bei 1100° wird der Einheitskreis dreimal gegen den Uhrzeigersinn komplett durchlaufen:

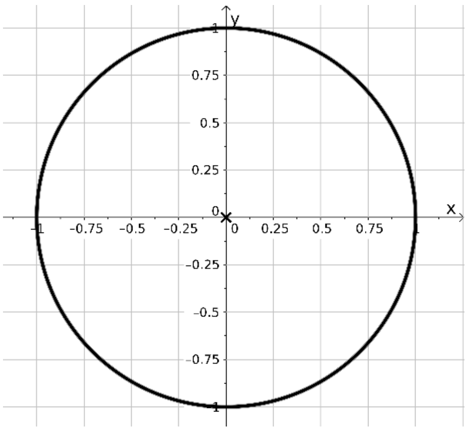
$$3 \cdot 360° = 1080°$$

In der „vierten“ Runde wandert er nun die noch fehlenden 20° weiter.

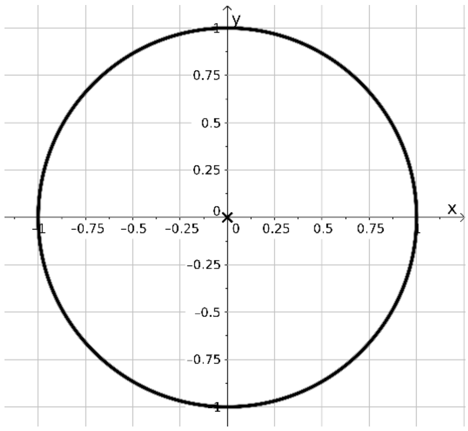
Gradmaß	Bogenmaß
$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 360°)$ $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 360°)$ $\tan(\alpha) = \tan(\alpha + k \cdot 360°)$	$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$ $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$ $\tan(\alpha) = \tan(\alpha + k \cdot 2\pi)$
Der Sinus-, Cosinus- bzw. Tangenswert ändert sich nicht, wenn man **volle Winkel** (360° bzw. 2π) zum gegebenen Winkel addiert bzw. subtrahiert.	

Bsp. 5) Gegeben ist der Winkel α. Gib alle Winkel im Gradmaß UND Bogenmaß zwischen 0° und 360° bzw. $[0; 2\pi]$ an, die denselben Sinuswert wie $\sin\alpha$ annehmen. Mache dir gegebenfalls eine Skizze!
ACHTUNG: Es gibt (fast) immer zwei Winkel, die denselben Sinuswert annehmen!

a. $\alpha = 910°$

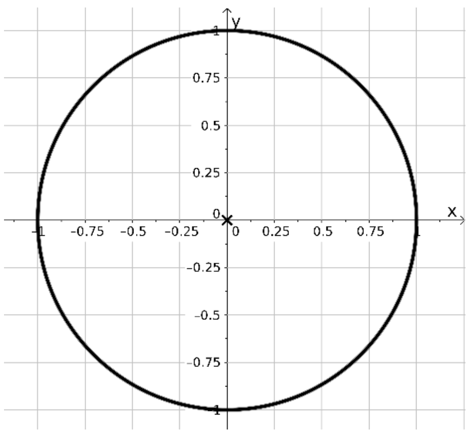


b. $\alpha = 436°$

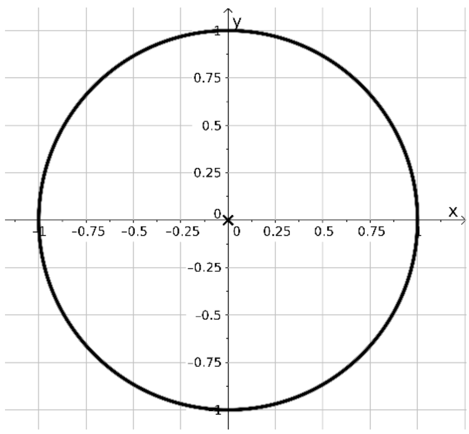


Bsp. 6) Gegeben ist der Winkel α. Gib alle Winkel im Gradmaß UND Bogenmaß zwischen 0° und 360° bzw. $[0; 2\pi]$ an, die denselben Cosinuswert wie $\cos\alpha$ annehmen. Mache dir eine Skizze!
ACHTUNG: Es gibt (fast) immer zwei Winkel, die denselben Cosinuswert annehmen!

a. $\alpha = 600°$



b. $\alpha = 1120°$



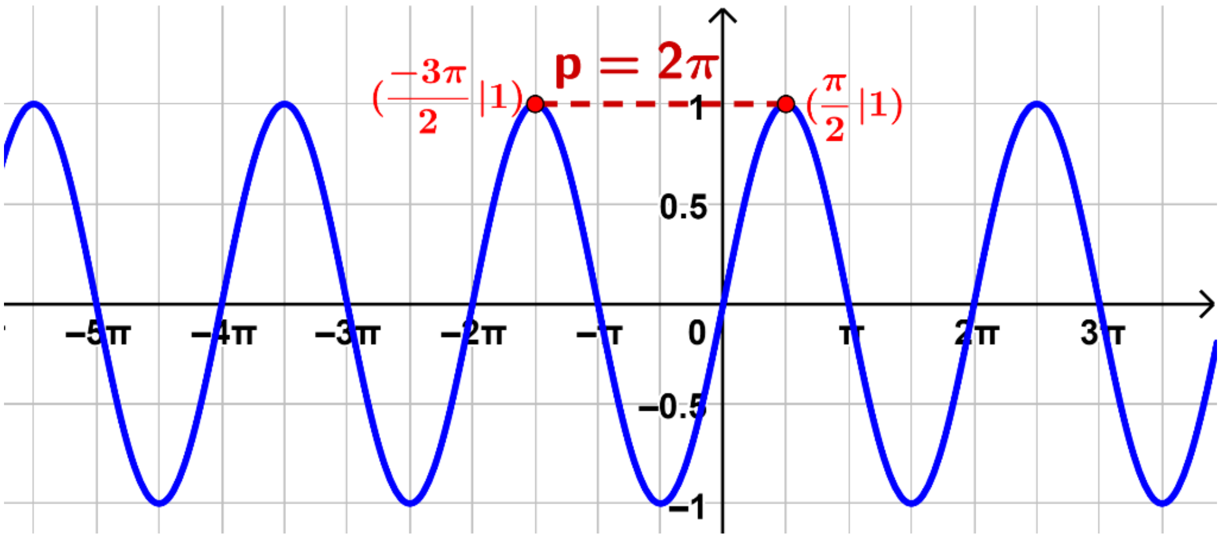
2.3 Graph und Eigenschaften der Winkelfunktionen

Wiederholung:

- Eine **gerade** Funktion ist symmetrisch bzgl. der y-Achse. Es gilt: $f(x) = f(-x)$
- Eine **ungerade** Funktion ist punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs. Es gilt: $f(x) = -f(-x)$
- Eine Funktion ist **periodisch**, wenn sich der Graph in gleichen Abständen immer wieder genau wiederholt. Es gilt: $f(x) = f(x + p)$ mit der Periode p.

$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{0\,rad}\ (\mathbf{0°})$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}\,rad}\ (\mathbf{90°})$	$\boldsymbol{\pi\,rad}\ (\mathbf{180°})$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}\,rad}\ (\mathbf{270°})$	$\boldsymbol{2\pi\,rad}\ (\mathbf{360°})$
$\boldsymbol{\sin\alpha}$	0	1	0	-1	0
$\boldsymbol{\cos\alpha}$	1	0	-1	0	1

2.3.1 Die Sinusfunktion $f(x) = sin(x)$ mit kleinster Periode $p = 2\pi$ - $f: \mathbb{R} \to [-1; 1]$

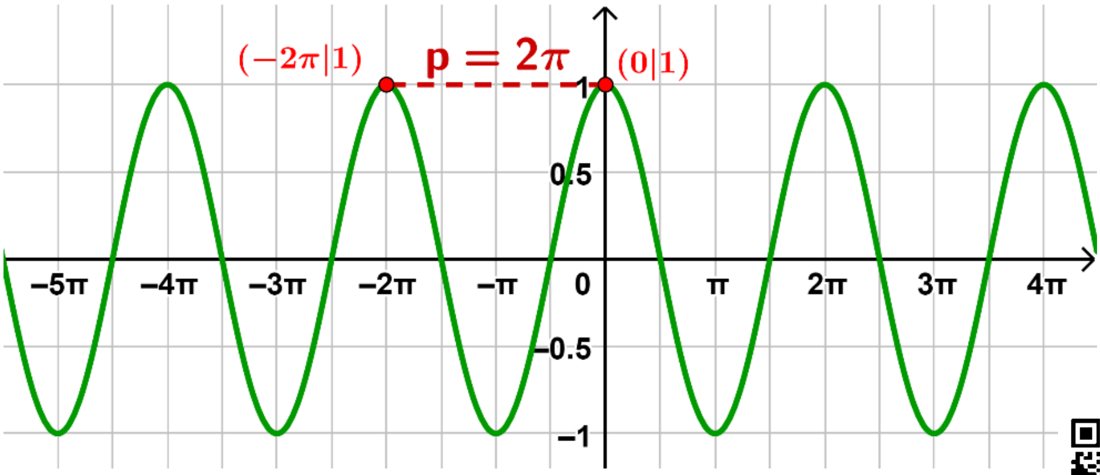


- **Definitionsmenge**: $D = \mathbb{R}$
- **Wertemenge**: $W = [-1; 1]$
- **Nullstellen**: $\sin(x) = 0 \iff x = k \cdot \pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Maximumstellen**: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Minimumstellen**: $x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Monotonie: **streng monoton steigend** in: $\left[-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\,;\, \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right] \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Monotonie: **streng monoton fallend** in: $\left[\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\,;\, \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right] \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Symmetrie: **Punktsymmetrisch** zum Ursprung (Ungerade Funktion) – es gilt: $\sin(-x) = -\sin(x)$

Video 3/7

SCAN MICH

2.3.2 Die Cosinusfunktion $f(x) = cos(x)$ mit kleinster Periode $p = 2\pi$ - $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$



Video 4/7

- **Definitionsmenge**: $D = \mathbb{R}$
- **Wertemenge**: $W = [-1; 1]$
- **Nullstellen**: $\cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Maximumstellen**: $x = k \cdot 2\pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Minimumstellen**: $x = \pi + k \cdot 2\pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Monotonie: **streng monoton steigend** in: $[\pi + k \cdot 2\pi\ ;\ 2\pi + k \cdot 2\pi] \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Monotonie: **streng monoton fallend** in: $[k \cdot 2\pi\ ;\ \pi + k \cdot 2\pi] \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Symmetrie: **Symmetrisch** zur y-Achse (Gerade Funktion) – es gilt: $\cos(-x) = \cos(x)$

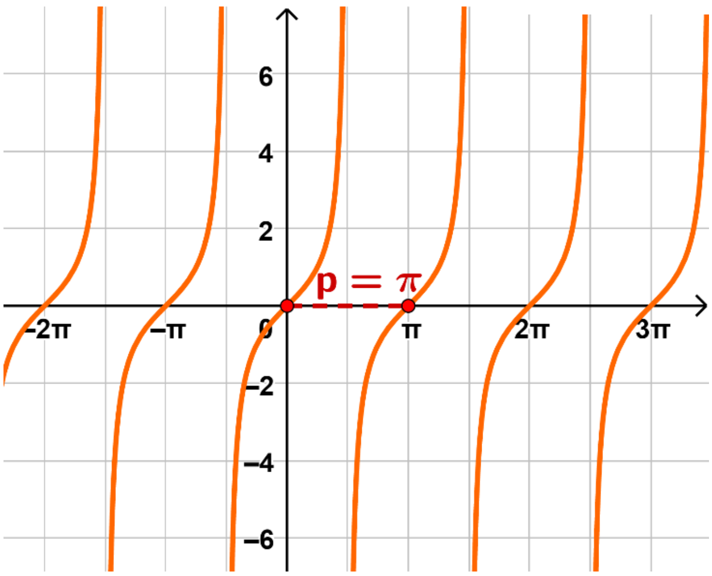
Video 5/7

2.3.3 Die Tangensfunktion $f(x) = tan\ (x)$ mit kleinster Periode $p = \pi$

Die Tangensfunktion nimmt für $\pm\frac{\pi}{2};\ \pm\frac{3\pi}{2};\ \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ keinen Wert an (nicht definiert -> schaue dir dazu den Einheitskreis an!). Somit ist die Funktion folgendermaßen definiert:

$$f:\ \mathbb{R}\backslash\{\pm\frac{\pi}{2};\ \pm\frac{3\pi}{2};\ \pm\frac{5\pi}{2}; \ldots\} \rightarrow \mathbb{R}$$

- **Definitionsmenge**: $D = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\} \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- **Wertemenge**: $W = \mathbb{R}$
- **Nullstellen**: $\tan(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k \cdot \pi \qquad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Maximumstellen**: $keine$
- Lokale **Minimumstellen**: $keine$
- Monotonie: **streng monoton steigend** in D
- Symmetrie: **Punktsymmetrisch** zum Ursprung (Ungerade Funktion) – es gilt: $\tan(-x) = -\tan\ (x)$



Bsp. 7) Zeichne die Winkelfunktion mit Hilfe von Technologie und gib die **Definitionsmenge**, die **Wertemenge**, die **Nullstellen** und **Extremstellen** an. Untersuche die Funktion auch auf **Periodizität**, **Monotonie** und **Symmetrie**. Wie lautet die **kleinste Periode**?

a. $f(x) = \sin(3x)$	b. $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$
c. $f(x) = 2 \cdot \sin(4x)$	d. $f(x) = -2 \cdot \cos(2x)$

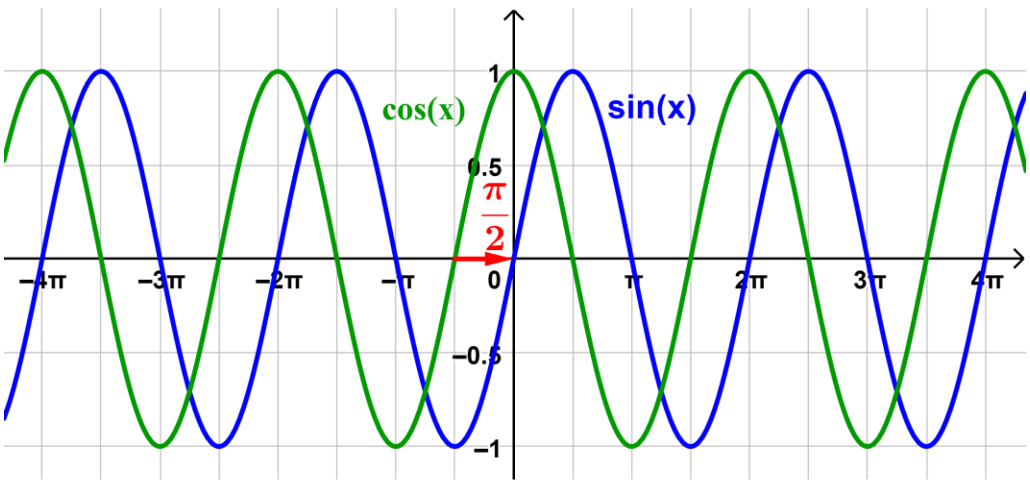
<u>Zusammenhang: Sinus- und Cosinusfunktion</u>

- Der Graph der Sinusfunktion entspricht dem Graphen der Cosinusfunktion, wenn man diesen Graph um $\frac{\pi}{2}$ parallel zur x-Achse nach rechts verschiebt. Es gilt:

$$\boldsymbol{sin(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

- Der Graph der Cosinusfunktion entspricht dem Graphen der Sinusfunktion, wenn man diesen Graph um $\frac{\pi}{2}$ parallel zur x-Achse nach links verschiebt. Es gilt:

$$\boldsymbol{cos(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

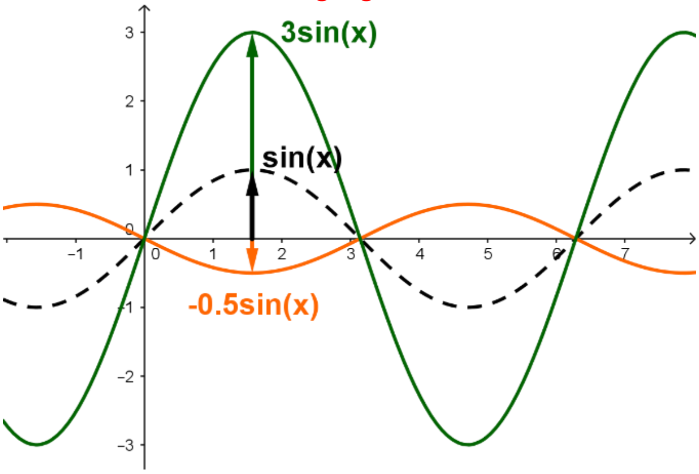


Video 6/7

3. Allgemeine Sinusfunktion der Form $f(x) = a \cdot sin(b \cdot (x + c)) + d$

Parameter a

- streckt ($a > 1$) bzw. staucht ($0 < a < 1$) den Graph in y-Richtung mit dem Faktor a.
- Ist $a < 0$ -> Graph wird zusätzlich an der x-Achse gespiegelt (bzw. falls $d \neq 0$: an der Gerade $y = d$)
- Die Anzahl der Schwingungen verändern sich NICHT!



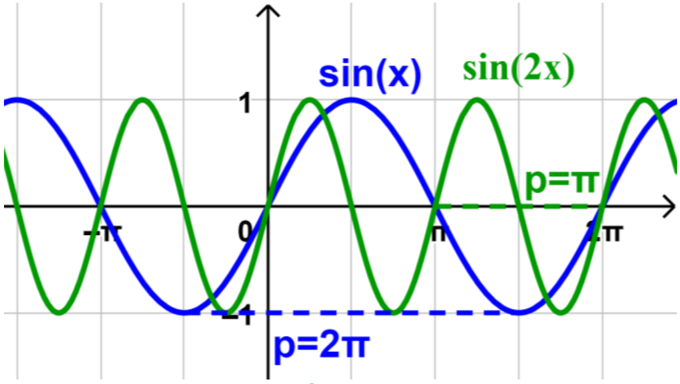
Parameter b

- ... kann die Anzahl der Perioden/Schwingungen verändern! Der Parameter b gibt die Anzahl der Schwingungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

Der Graph hat die kleinste Periode $p = \frac{2\pi}{|b|}$.

⇨ Ist $b = 1$: $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ (übliche Periode!)

⇨ Ist $b = 2$: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ (Doppelt so viele Schwingungen!)



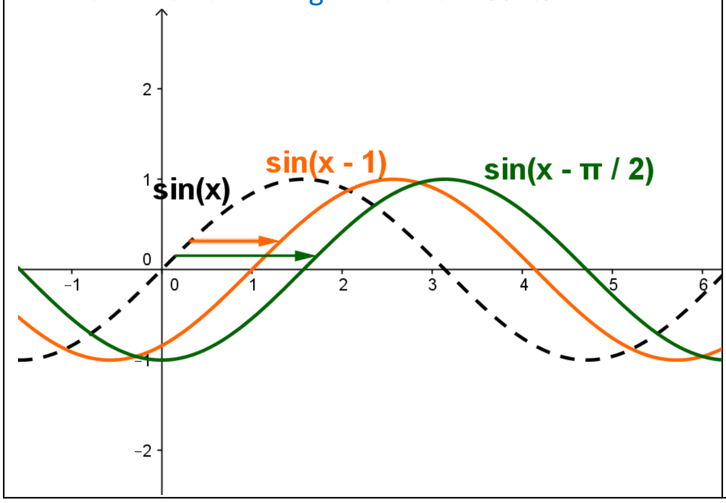
⇨ Ist $b = 0{,}5$: $p = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$

Parameter c

... verursacht eine Verschiebung des Funktionsgraphen in x-Richtung.

$c > 0$: Verschiebung um c nach **links**

$c < 0$: Verschiebung um c nach **rechts**



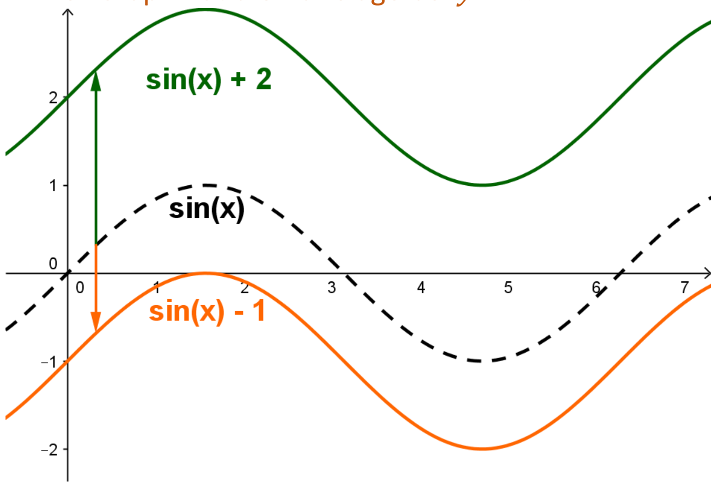
Parameter d

... verschiebt den Graph in y-Richtung.

$d > 0$: Verschiebung um d nach **oben**

$d < 0$: Verschiebung um d nach **unten**

Der Graph hat die Ruhelage bei $y = d$



<u>Allgemeine Sinusfunktion selbstständig skizzieren:</u>

<u>Schritt 1: (Parameter d)</u>

- Ist $d \neq 0$, markiere eine strichlierte Gerade bei $y = d$.
- Ist $d = 0$, so bleibt die x-Achse das „Zentrum“ des Graphen.

<u>Schritt 2: (Parameter c)</u>

- Die Funktion $sin(x)$ geht durch den Ursprung $(0|0)$. Ist $c \neq 0$, „verschiebe“ diesen Punkt um den Wert c nach links (> 0) bzw. rechts (< 0). Markiere diesen Punkt (=“Startpunkt“).

Schritt 3 (Parameter b)

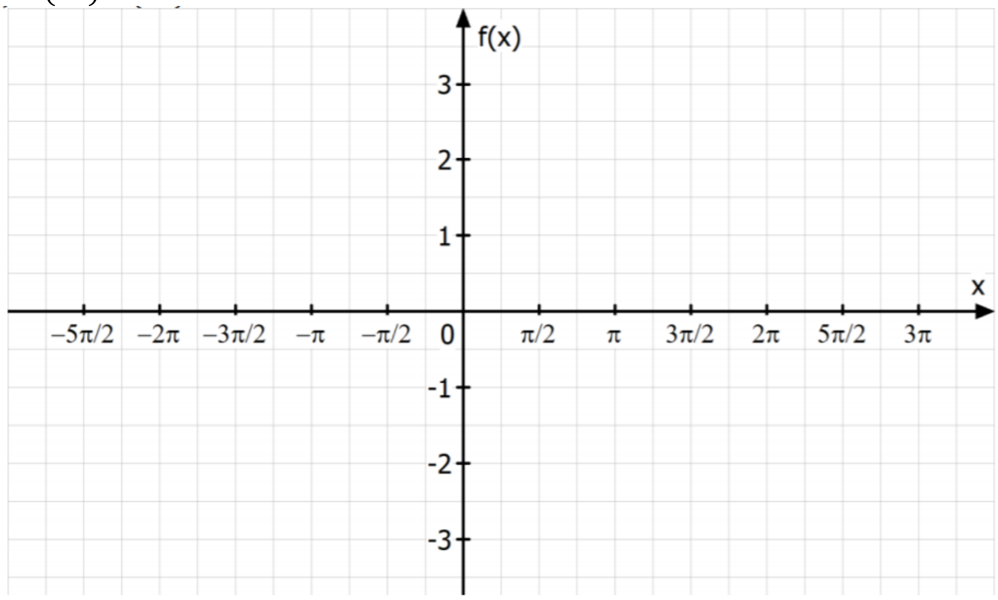
- Die Periode der Sinusfunktion ist $p = \frac{2\pi}{|b|}$. Markiere nun mit einer Farbe im „Periodenabstand“ weitere Nullstellen links und rechts auf der x-Achse. Genau in der Mitte jedes Periodenabstands befindet sich eine weitere Nullstelle (andere Farbe!).

Schritt 4 (Parameter a)

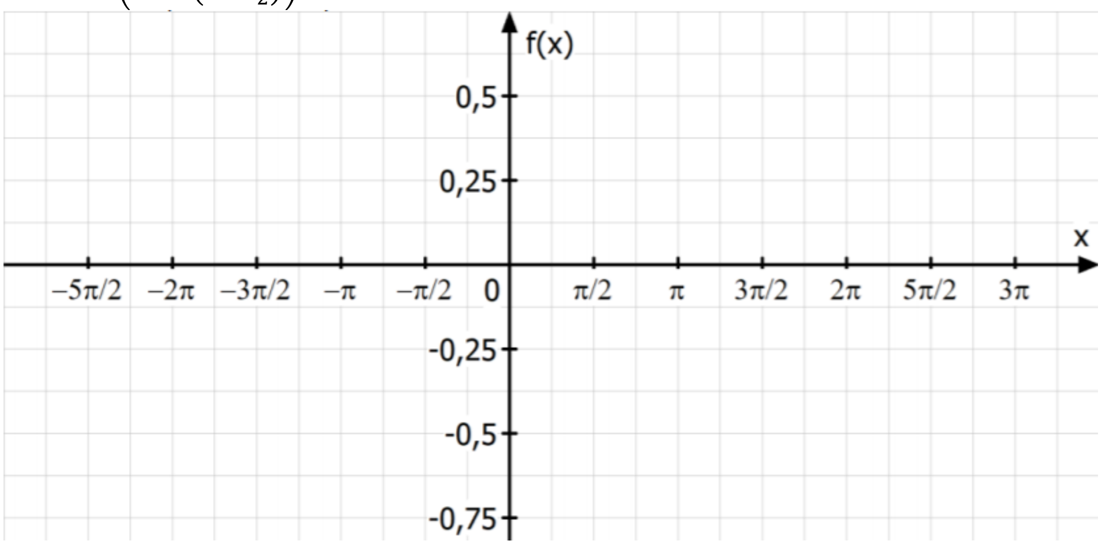
- Zwischen **zwei Nullstellen** verläuft nun der Graph entweder **oberhalb oder unterhalb** der x-Achse (bzw. der Gerade $y = d$). Ist $a > 0$, so ist die erste Phase vom Graphen oberhalb dieser Gerade & in weiterer Folge wechselt dies immer ab ($a < 0$: umgekehrt!). Markiere diese Phasen jeweils mit einem + oder -.
- In der Mitte von zwei Nullstellen befindet sich immer eine Minimum- bzw. Maximumstelle. Die Höhe des Ausschlages gibt jeweils der Parameter a an! Markiere diese Extrempunkte und zeichne im Anschluss den Graphen der Winkelfunktion.

Bsp. 8) Skizziere den Graphen der allgemeinen Sinusfunktion. Halte dich dabei an die Schritte 1-4.

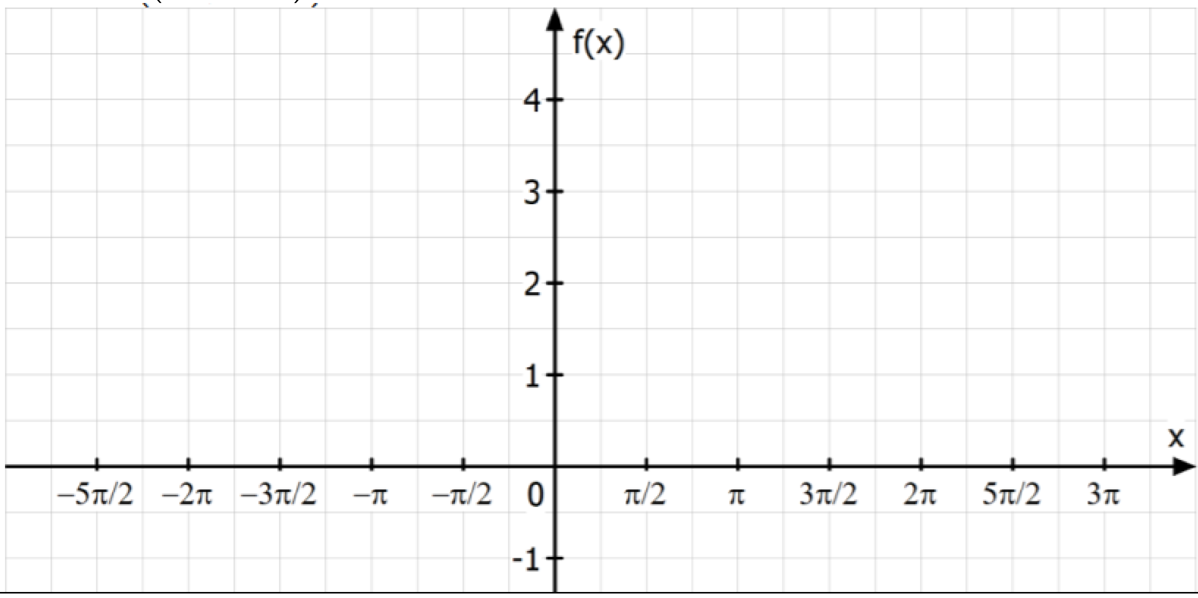
a. $f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$



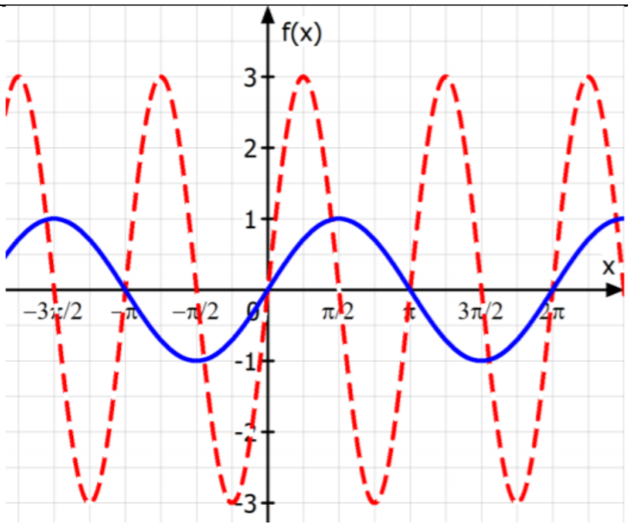
b. $f(x) = 0{,}5 \cdot \sin\left(0{,}5 \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

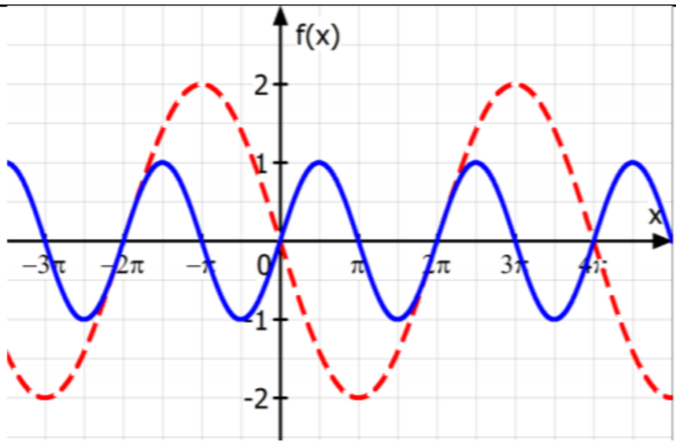


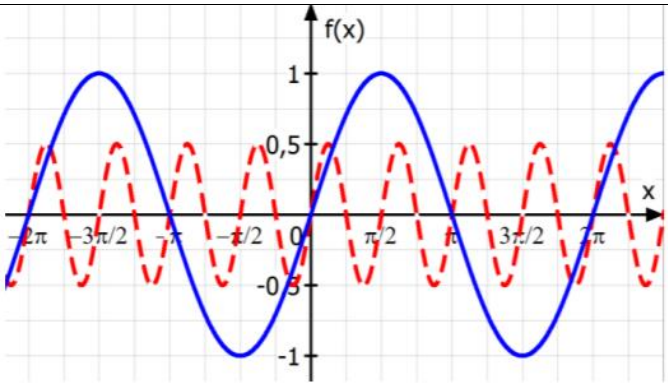
c. $f(x) = 2 \cdot \sin\left(3 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 2$

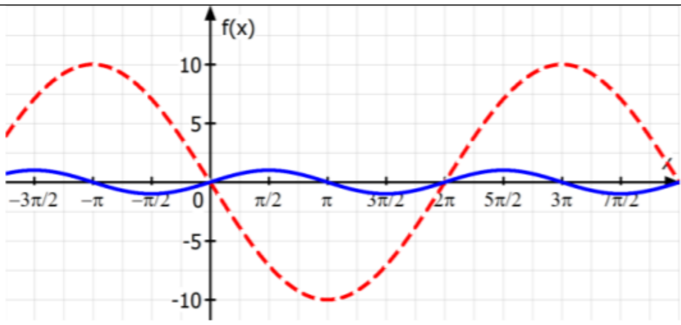


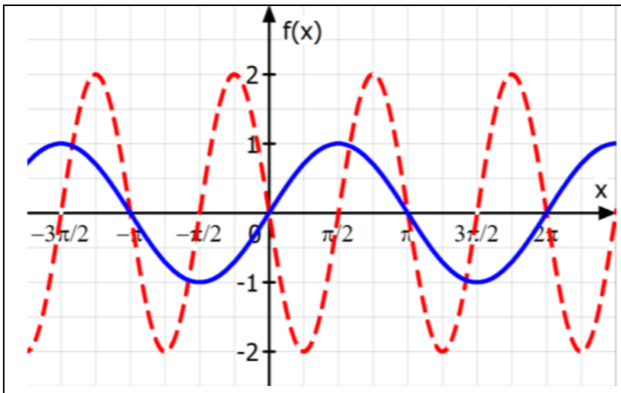
Bsp. 9) Gegeben sind der Graph der Sinusfunktion (blau) und der Graph einer allgemeinen Sinusfunktion (strichliert) der Form $f(x) = a \cdot sin\ (b \cdot x)$. Bestimme die Parameter a und b

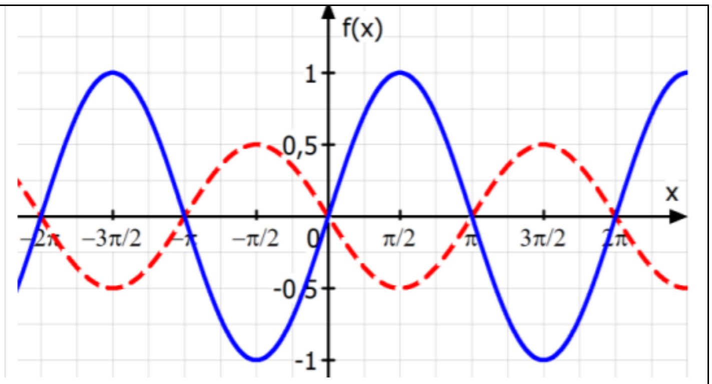










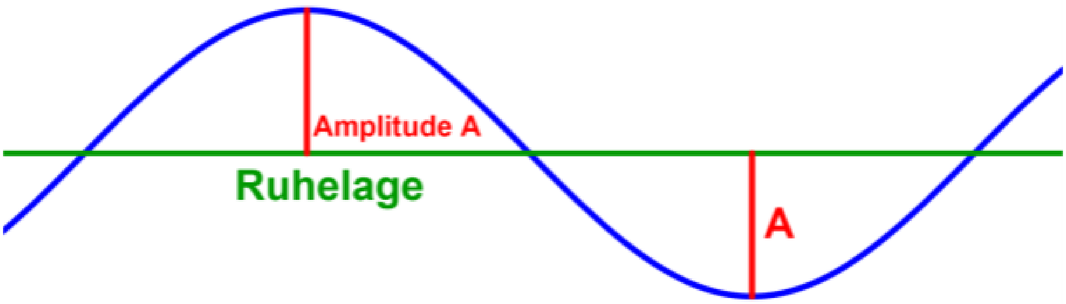


4. Harmonische Schwingungen $s(t) = A \cdot sin(\omega \cdot (t + \varphi_0))$

Video 7/7

Unter einem Federpendel versteht man einen an einer Feder befestigten Körper, der um eine Ruhelage schwingt. Trägt man die Abstände des Körpers $s(t)$ von der Ruhelage entlang einer Zeitachse auf, so entstehen Sinusschwingungen. Dies kann mit Hilfe der allgemeinen Sinusfunktion beschrieben werden. Die Parameter a, b und c bekommen im physikalischen Kontext spezielle Bezeichnungen:

$$\text{Aus } f(x) = a \cdot sin(b \cdot (x + c)) \ wird \ s(t) = A \cdot sin(\omega \cdot (t + \varphi_0))$$



Begriff	Pendelbewegung	Einheit
Ruhelage	Die Ruhelage ist derjenige Funktionswert, um den die Funktion (bildlich gesprochen) „schwingt“. Sie liegt in der Mitte zwischen dem höchsten und niedrigsten Funktionswert.	
t… Zeit	beschreibt die vergangene Zeit seit Beginn der Beobachtung	1s
s(t)… Elongation in Meter (m)	beschreibt den Abstand des schwingenden Körpers (in Meter) zur Ruhelage zum Zeitpunkt t	1m
A … Amplitude in (m)	größte Entfernung des schwingenden Körpers von der Ruhelage (=größte Auslenkung)	1m
ω **… Kreisfrequenz**	Anzahl der Schwingungen bzw. Perioden im Intervall $[0; 2\pi]$	
φ_0 **… Phasenverschiebungszeit**	Verschiebung des Graphen um φ_0 Sekunden nach links.	
Schwingungsdauer T (in sek)	Zeitdauer einer (vollen) Schwingung	1s
Frequenz f	Zahl der Schwingungen pro Sekunde	1 Hz (Hertz) = $1s^{-1}$

Zusammenhang: Schwingungsdauer und Frequenz

Für der schwingende Körper f Schwingungen in einer Sekunde aus, dann dauert eine Schwingung $\frac{1}{f}$ Sekunden. Daraus folgt:

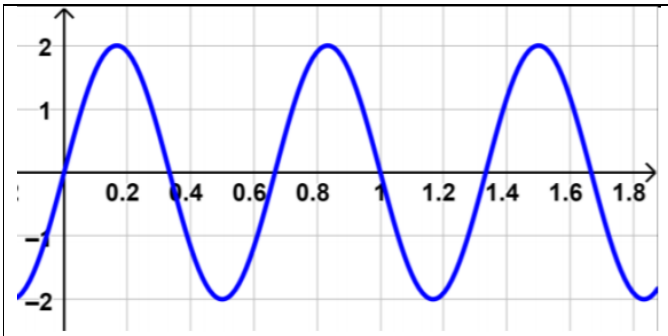
$$T = \frac{1}{f} \qquad und \qquad f = \frac{1}{T}$$

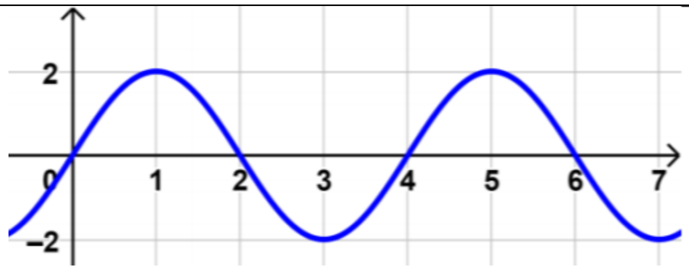
Zusammenhang: Frequenz und Kreisfrequenz

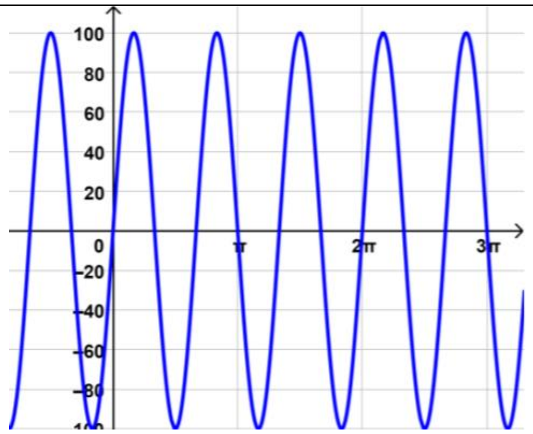
Pro Sekunde legt der Körper außerdem $f = \frac{\omega}{2\pi}$ Schwingungen zurück, da ω die Anzahl der Schwingungen in 2π Sekunden angibt.

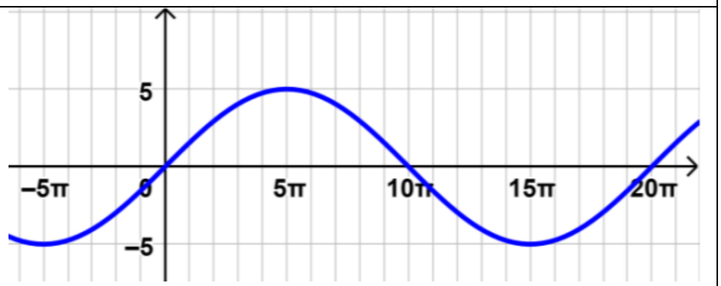
$$f = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \omega = 2\pi f$$

Bsp. 10) Der Graph einer harmonischen Schwingung der Form $s(t) = \boldsymbol{A} \cdot sin(\boldsymbol{\omega} \cdot (t + \boldsymbol{\varphi_0}))$ ist dargestellt. Bestimme die **Amplitude**, die **Schwingungsdauer**, die **Frequenz** und die **Kreisfrequenz** der Schwingung (t in s, s(t) in m). Gib die **Funktionsgleichung** an.









Bsp. 11) Gegeben ist die Funktionsgleichung einer harmonischen Schwingung ($s(t)\ in\ m, t\ in\ s$). Gib die **Amplitude** A, die **Kreisfrequenz** ω, die **Frequenz** f und die **Schwingungsdauer** T an.

a. $s(t) = 3 \cdot sin\,(13t)$	**b.** $s(t) = 8 \cdot sin\,(5t)$
c. $s(t) = 4 \cdot sin\,(2 \cdot (t+2))$	**d.** $s(t) = 1{,}5 \cdot sin\,(3 \cdot (t-4))$

Bsp. 12) Beschreibe, wie sich die Amplitude, die Schwingungsdauer bzw. die Frequenz einer Schwingung ändert, wenn man von der Elongation $s_1(t)$ zur Elongation $s_2(t)$ übergeht. Skizziere die beiden Graphen im Intervall $[0; 2\pi]$ mit der freien Hand in einem gemeinsamen Koordinatensystem. Kontrolliere mit GeoGebra.

a. $s_1(t) = \sin(t) \qquad s_2(t) = 3 \cdot \sin(4t)$

b. $s_1(t) = \sin(t) \qquad s_2(t) = 0{,}5 \cdot \sin(0{,}25t)$