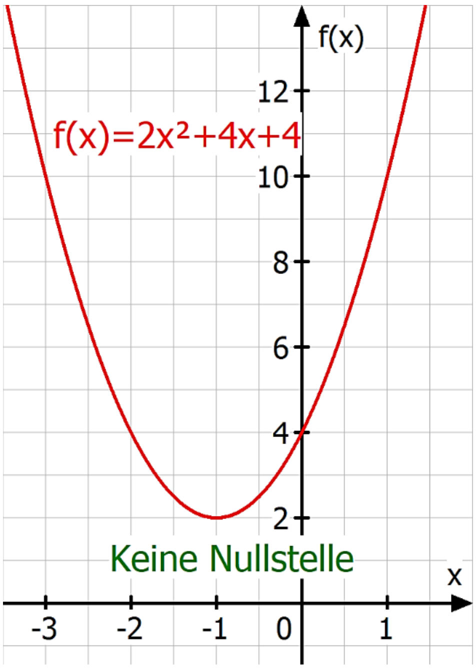
Quadratische Funktionen (3)

Quadratische Gleichungen graphisch lösen

SKRIPT (7 Seiten)

Theoretische Erklärungen und Beispielaufgaben zu **folgenden Themenbereichen**:

- **Quadratische Gleichungen graphisch lösen**
- **Theoretische Überlegungen – Anzahl der Nullstellen**
  - **Hauptform, Normierte Form, Scheitelpunktform**



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

-> **QR-Codes** im SKRIPT!

Prof. Tegischer

Allgemeine Informationen zum Skript

Anwendung des Materials:

Im Skript werden die zu erlernenden Inhalte stets durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung.

YouTube-Playlist
(PDF-Datei: KLICKEN!)

Die **Musterlösungen** findest du (sofern bereits verfügbar) kostenlos auf meiner Homepage unter folgendem Link: https://prof-tegischer.com/09-quadratische-funktionen/

Einsatz des Materials

- Einsatz für **Lehrpersonen** als Aufwertung für den eigenen Unterricht („**Flipped Classroom**", **Erarbeitung** oder **Festigung** des **Stoffes** anhand des Skriptes, **Einsatz** der **Lernvideos**, etc.)
- Möglichkeiten für **SchülerInnen**: Selbstständiges Erarbeiten bzw. Festigen eines Stoffgebietes mit dem **Skript** (inkl. Videos & Musterlösungen).
- & noch viele weitere Möglichkeiten – wenn du eine besondere Idee hast, lass es mich wissen!! 😊

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. Alle **Aufgaben** wurden von mir erstellt.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt.
- Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Vielen Lieben Dank, dass du dich für mein Material entschieden hast. Ich würde mich freuen, wenn es dir bei der Unterrichtsgestaltung oder beim selbstständigen Erarbeiten helfen kann.

Du darfst das Material für **deinen eigenen Unterricht** verwenden.

Du darfst es NICHT gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Grafiken dürfen NICHT herauskopiert werden.

Hast du Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, kannst du mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (lukastegischer5@gmx.at). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com findest du weitere Informationen zu meinen Materialien. Ich würde mich über ein **Feedback** dazu freuen!

Video 1/4: Grundlagen

Quadratische Funktionen: Quadratische Gleichungen graphisch lösen

1. Quadratische Gleichungen graphisch lösen

Wie wir bereits wissen, sind die **Nullstellen** einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ **identisch** mit den **Lösungen** der zugehörigen **quadratischen Gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$.

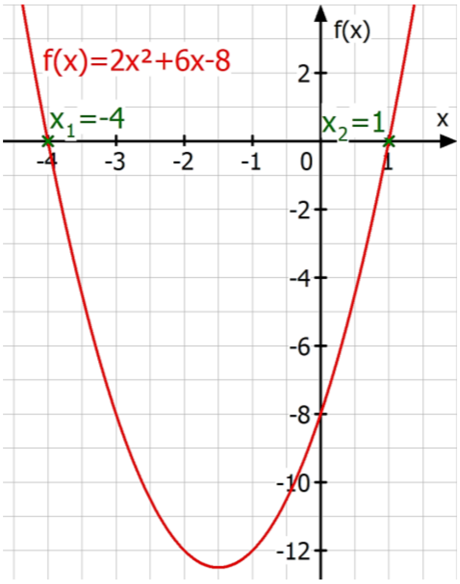
Eine **quadratische Gleichung** kann **graphisch** gelöst werden, indem man den **Graphen** der zugehörigen quadratischen Funktion **zeichnet** und die **Nullstellen** (sofern vorhanden) **abliest**.

Quadratische Gleichungen können entweder **keine**, **eine** oder **zwei reelle Lösungen** besitzen. Dies hängt von der Diskriminante (=Wert unter der Wurzel) ab. **Graphisch** lassen sich diese **Lösungsfälle** anschaulich demonstrieren, da eine quadratische Funktion entweder **keine**, **eine** oder **zwei Nullstellen** besitzt.

Graphische Veranschaulichung für $a > 0$ (Parabel ist nach oben geöffnet)

Zwei reelle Lösungen = Zwei Nullstellen

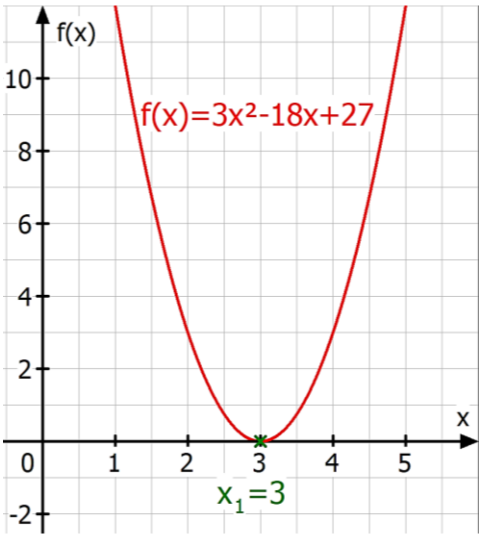
$2x^2 + 6x - 8 = 0$



$L = \{-4; 1\}$

Eine reelle Lösung = Eine Nullstelle

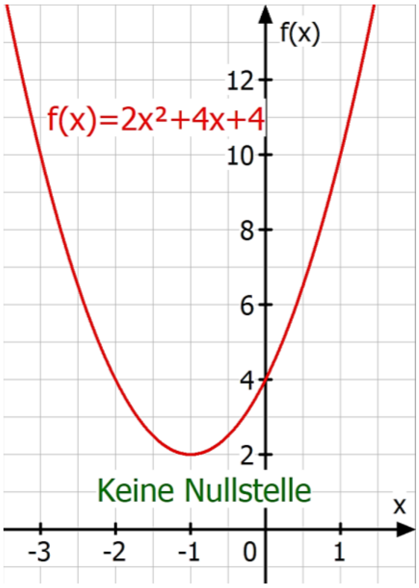
$3x^2 - 18x + 27 = 0$



$L = \{3\}$

Keine reelle Lösung = Keine Nullstelle

$2x^2 + 4 + 4 = 0$



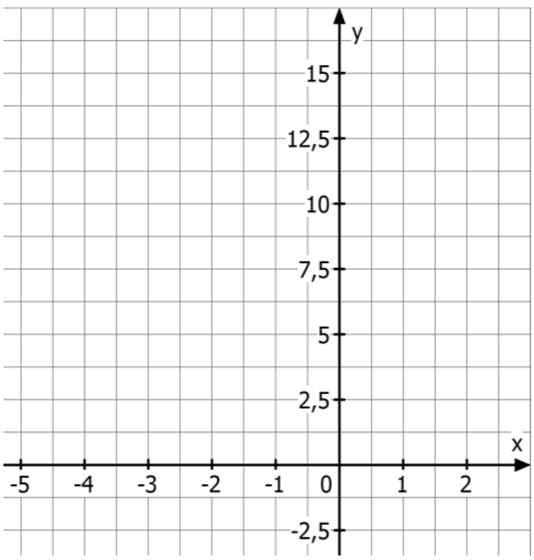
$L = \{\}$

Anmerkung: Ist $a < 0$, ist die Parabel nach unten geöffnet & die drei Lösungsfälle treten **analog** auf.

Bsp. 1) **Löse** die zugehörige quadratische Gleichung **graphisch** (=0) und gib die **Lösungsmenge** an. Erstelle dazu eine **Wertetabelle** (*Nebenrechnungen auf einem Zettel*) und zeichne die **Funktion** im **gegebenen Intervall.**

a. $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 4x + 3}$ $in\ [-5; 2]$

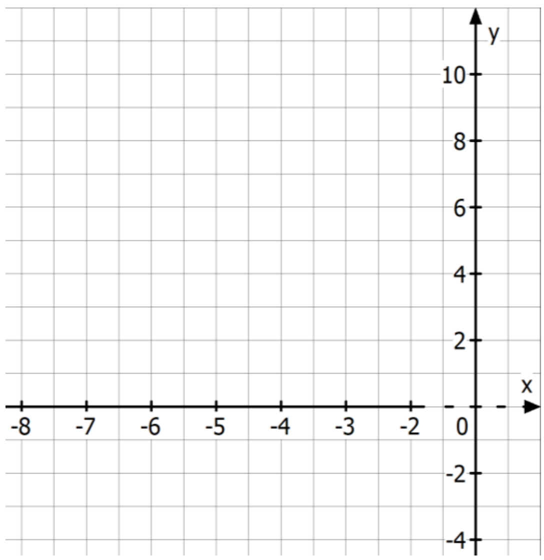
x	$f(x)$
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	



$L =$

b. $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 11x + 28}$ $in\ [-8; -2]$

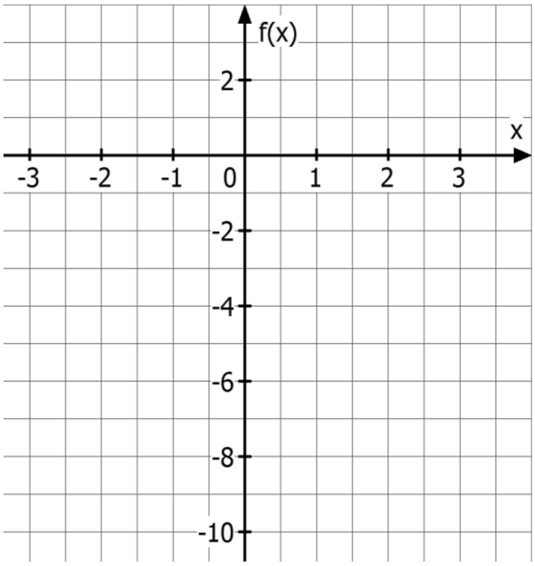
x	$f(x)$
-8	
-7	
-6	
-5	
-4	
-3	
-2	



$L =$

c. $f(x) = -x^2 - x + 2$ *in* $[-3; 3]$

x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

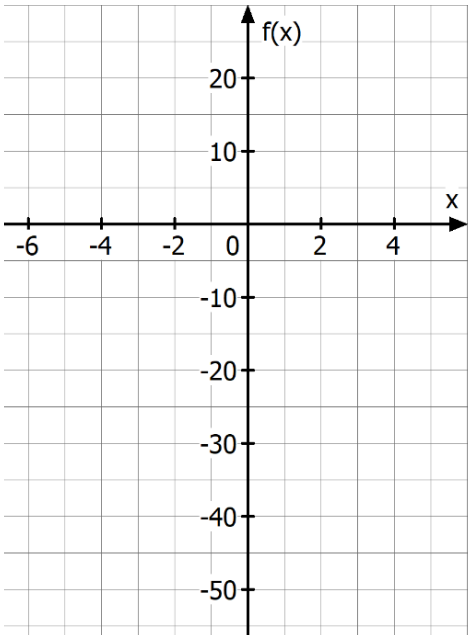


$L =$

d. $f(x) = 3x^2 + 3x - 36$ *in* $[-5; 4]$

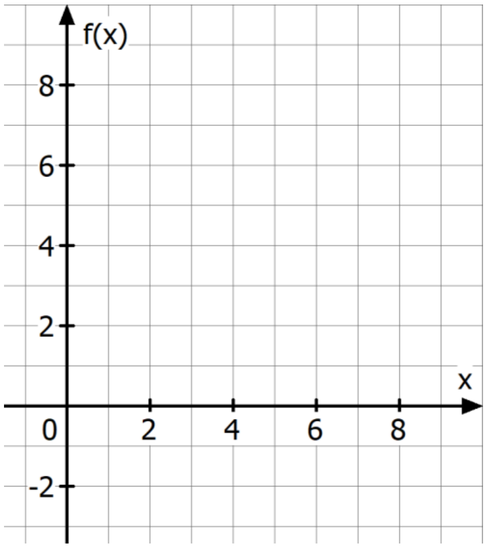
x	$f(x)$
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

$L =$



e. $f(x) = 0,5x^2 - 4x + 8$ *in* $[0; 8]$

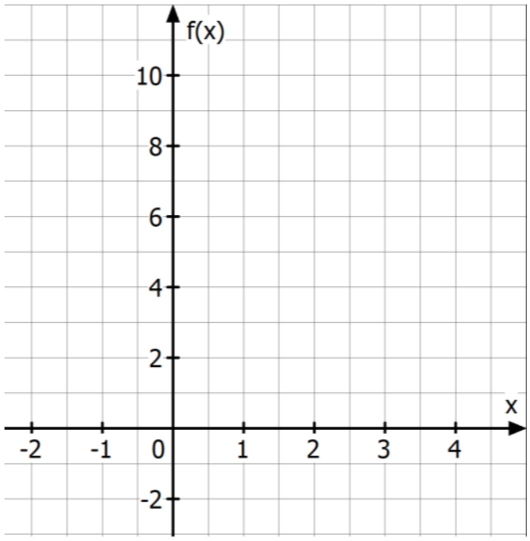
x	$f(x)$
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	



$L =$

f. $f(x) = x^2 - 2x + 2$ *in* $[-2; 4]$

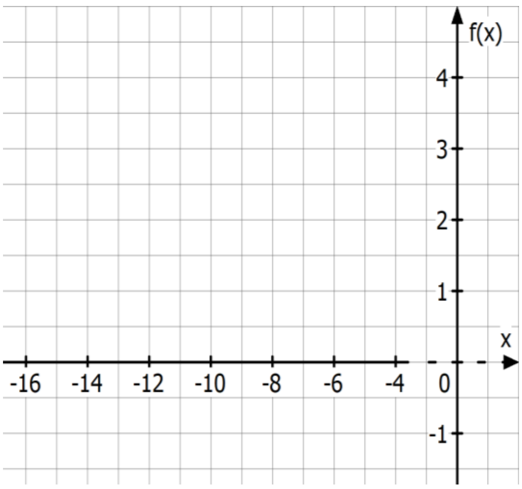
x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



$L =$

g. $f(x) = 0,1x^2 + 2x + 10$ *in* $[-16; -4]$

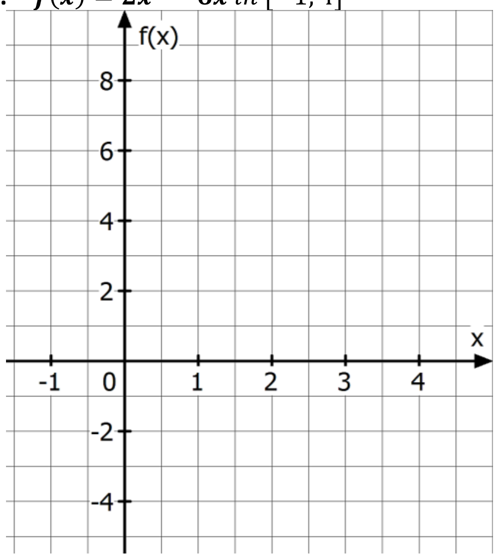
x	$f(x)$
-16	
-14	
-12	
-10	
-8	
-6	
-4	



$L =$

h. $f(x) = 2x^2 - 6x$ *in* $[-1; 4]$

x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



$L =$

Video 2/4: Hauptform

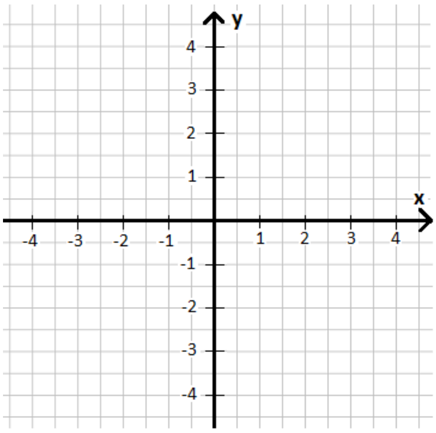
2. Theoretische Überlegungen: Anzahl der Nullstellen (Verständnis!)

2.1. Hauptform $f(x) = ax^2 + bx + c$

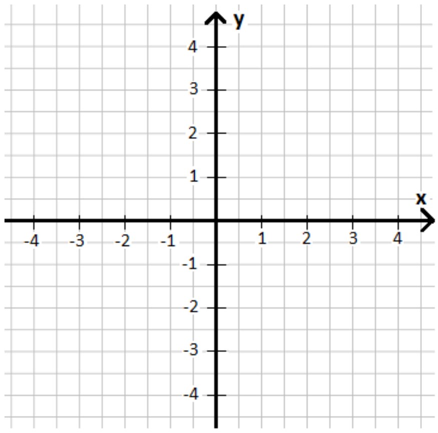
Erinnerung – Direkte Berechnung des Scheitelpunktes (Hauptform): $S = \left(-\frac{b}{2a} \middle| f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

Schritt 1: Zuerst müssen wir schauen, ob $a > 0$ oder $a < 0$. Dies sagt uns, ob die Parabel **nach oben** oder **unten** geöffnet ist.

Theoretische Überlegung: Ist die Parabel nach oben geöffnet $(a > 0)$, müsste der **Scheitelpunkt** im **negativen Bereich** der y-Achse liegen, um 2 Nullstellen zu erhalten.



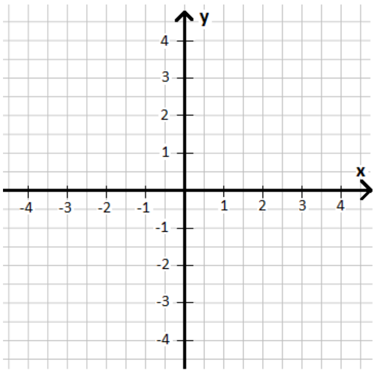
Ist die Parabel nach unten geöffnet $(a < 0)$, müsste der **Scheitelpunkt** im **positiven Bereich** der y-Achse liegen, um 2 Nullstellen zu erhalten.



Schritt 2: D.h. es ist entscheidend, ob der Funktionswert des Scheitelpunktes $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ positiv, null oder negativ ist!

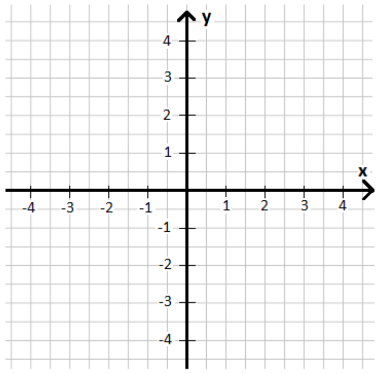
Zwei Nullstellen: Scheitelpunkt liegt unterhalb der x-Achse.

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) < 0$$



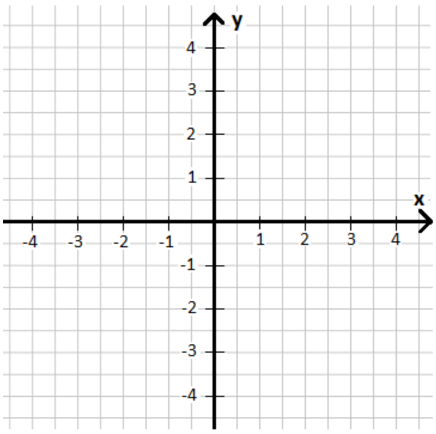
Zwei Nullstellen: Scheitelpunkt liegt oberhalb der x-Achse.

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) > 0$$



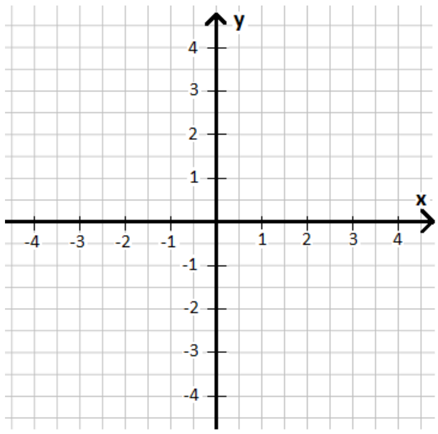
Eine Nullstelle: Scheitelpunkt liegt auf der x-Achse.

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$$



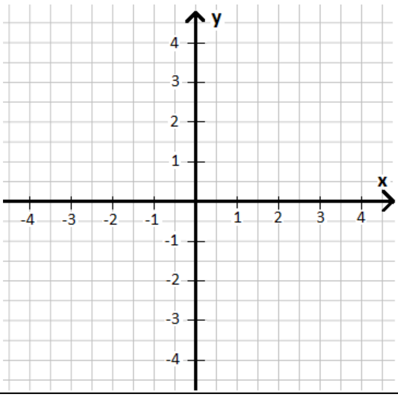
Eine Nullstelle: Scheitelpunkt liegt auf der x-Achse.

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$$



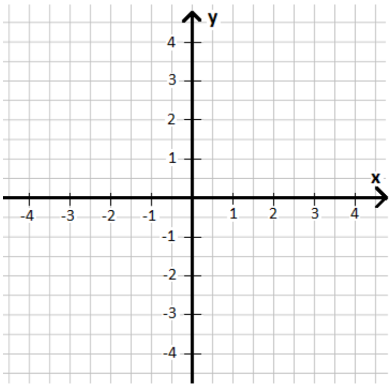
Keine Nullstelle: Scheitelpunkt liegt oberhalb der x-Achse.

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) > 0$$



Keine Nullstelle: Scheitelpunkt liegt unterhalb der x-Achse.

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) < 0$$



Bsp. 2) Gegeben sind Aussagen über die Hauptform $f(x) = ax^2 + bx + c$. Vervollständige die **Lücken** mit den Wörtern **keine**, **eine** oder **zwei**.

a. Ist der Parameter a größer als 0 und liegt der Scheitel der Funktion unterhalb der x-Achse, so besitzt die Funktion _________ Nullstelle/n.

b. Ist $a < 0$ und $f\left(-\frac{b}{2a}\right) > 0$, dann hat der Funktionsgraph _________ Nullstelle/n.

c. Ist die Parabel nach oben geöffnet und liegt der Scheitel auf der y-Achse, so hat die Funktion _____ Nullstelle/n.

d. Ist $a > 0$ und $f\left(-\frac{b}{2a}\right) > 0$, so hat die Funktion f ________ Nullstelle/n.

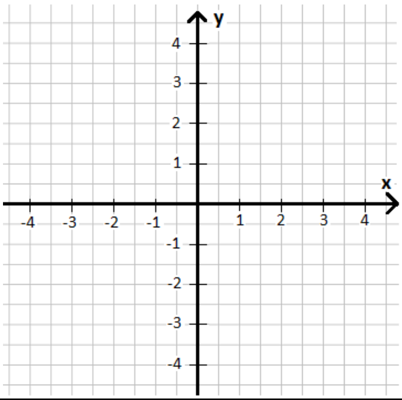
e. Der Scheitel hat eine negative y-Koordinate und die Funktion ist nach unten geöffnet. Die Funktion besitzt ________ Nullstelle/n.

Bsp. 3) Kreuze **vier** Aussagen an, die für die Hauptform $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ zutreffen.

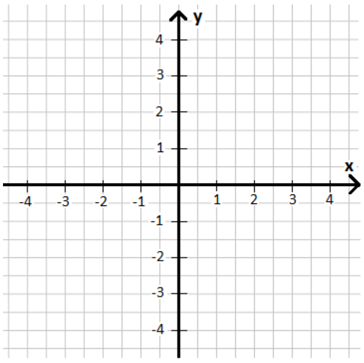
Ist $a < 0$ und $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$, dann besitzt die Funktion **immer** genau eine Nullstelle.	○
Ist die x-Koordinate des Scheitels negativ und $a > 0$, dann hat f immer genau zwei Nullstellen.	○
Ist $a > 0$ und $f\left(-\frac{b}{2a}\right) < 0$, dann kann die Funktion keine Nullstelle besitzen.	○
Liegt der Scheitel unterhalb der x-Achse und ist die Parabel nach oben geöffnet, so besitzt die Funktion stets zwei Nullstellen.	○
Ist $a < 0$ und die y-Koordinate das Scheitels gleich 0, so hat die Funktion genau eine Nullstelle.	○
Ist $a < 0$ und $f\left(-\frac{b}{2a}\right) < 0$, so kann der Funktionsgraph entweder eine oder zwei Nullstellen besitzen.	○
Liegt der Scheitel im Ursprung, so hat die Funktion zwei Nullstellen.	○
Wenn die y-Koordinate des Scheitelpunktes genau 0 ist, so spielt es keine Rolle in Hinsicht auf die Nullstellen, ob $a > 0$ oder $a < 0$ ist. Die Funktion besitzt nämlich stets genau eine Nullstelle.	○

Bsp. 4) Skizziere einen zur quadratischen Gleichung passenden Funktionsgraphen mit den gegebenen Eigenschaften. Zeichne die Nullstelle/n ein.

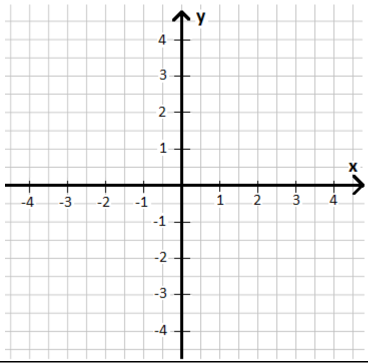
$a > 0, 2\ Lösungen$



$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0, Parabel\ nach\ unten\ geöffnet$



$f\left(-\frac{b}{2a}\right) < 0, a < 0$



2.2. Spezialfall $a = 1$: $f(x) = x^2 + bx + c$ (bzw. $f(x) = x^2 + px + q$)

Ist $a = 1$, so löst man quadratische Gleichungen in **der normierten Form $x^2 + px + q = 0$.**

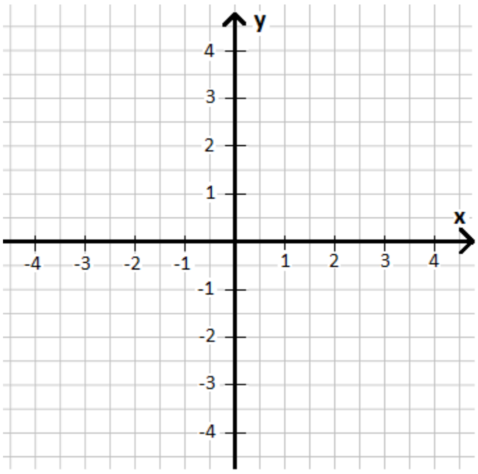
Erinnerung: $S = \left(-\frac{b}{2}\middle| f\left(-\frac{b}{2}\right)\right) - bzw. wir\ verwenden\ jetzt: S = \left(-\frac{p}{2}\middle| f\left(-\frac{p}{2}\right)\right)$

Schritt 1: Da **a gleich 1** ist (x^2), ist die Parabel immer nach **oben** geöffnet. D.h. von den Lösungsfällen können die graphischen Überlegungen von $a > 1$ übernommen werden.

Schritt 2: Es ist entscheidend, ob der Funktionswert des Scheitelpunktes $f\left(-\frac{p}{2}\right)$ **positiv**, **null** oder **negativ** ist!

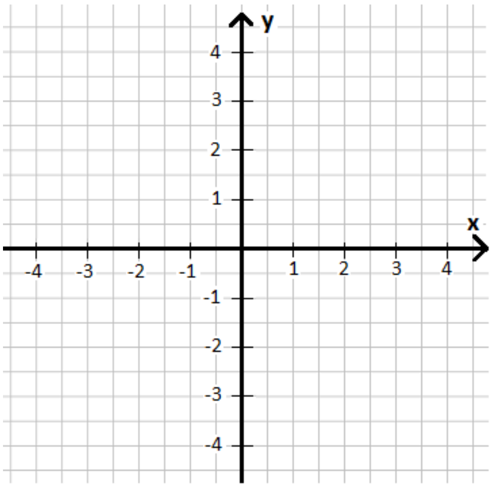
<u>Zwei Nullstellen</u>: Scheitelpunkt liegt unterhalb der x-Achse.

$$f\left(-\frac{p}{2}\right) < 0$$



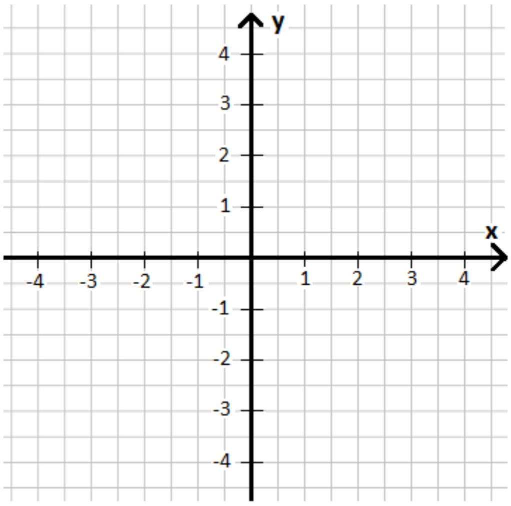
<u>Eine Nullstelle</u>: Scheitelpunkt liegt auf der x-Achse.

$$f\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$$



<u>Keine Nullstelle</u>: Scheitelpunkt liegt oberhalb der x-Achse.

$$f\left(-\frac{p}{2}\right) > 0$$



Bsp. 5) Kreuze <u>**die drei**</u> Aussagen an, die für die Funktion des Typs $f(x) = x^2 + px + q$ zutreffen.

Ist $q < 0$, so hat die Funktion stets zwei Nullstellen.	○
Ist die y-Koordinate des Scheitels positiv, dann besitzt f keine Nullstelle.	○
Ist $-\frac{p}{2} = 0$, dann besitzt die Funktion genau eine Nullstelle.	○
Liegt der Scheitel auf der x-Achse, so kann die Funktion entweder keine oder genau eine Nullstelle besitzen.	○
Ist $f\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$, so besitzt die Funktion stets eine Nullstelle.	○
Ist $f\left(-\frac{p}{2}\right) \geq 0$, so kann die Funktion entweder keine oder genau eine Nullstelle besitzen.	○
Ist $f\left(-\frac{p}{2}\right) \leq 0$, so kann die Funktion entweder keine oder genau eine Nullstelle besitzen.	○

2.3. Scheitelpunktform: $f(x) = a \cdot (x - m)^2 + n$

Erinnerung: $S = (m \mid n)$

Schritt 1: Ist $a > 0$ oder $a < 0$? Dies sagt uns, ob die Parabel nach oben oder unten geöffnet ist.

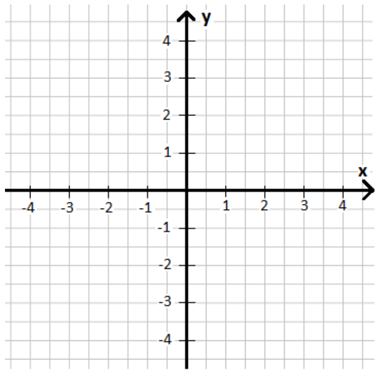
Schritt 2: D.h. es ist entscheidend, ob der Funktionswert des Scheitelpunktes ($= \boldsymbol{n}$) positiv, null oder negativ ist!

Der Parameter **m** hat keine **Auswirkungen auf die Anzahl der Nullstellen**. Dieser kann beliebig gewählt werden, da es keine Rolle spielt, ob der Scheitelpunkt weiter rechts bzw. links liegt!

Fall 1: $\boldsymbol{a > 0}$

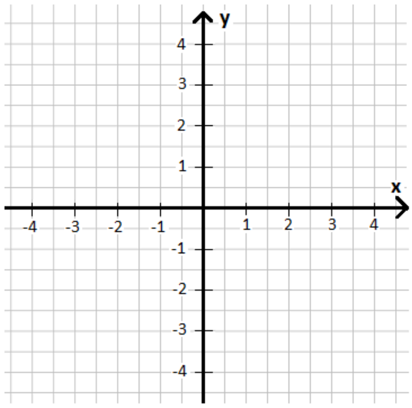
Zwei Nullstellen: Scheitelpunkt liegt unterhalb der x-Achse.

$n < 0$



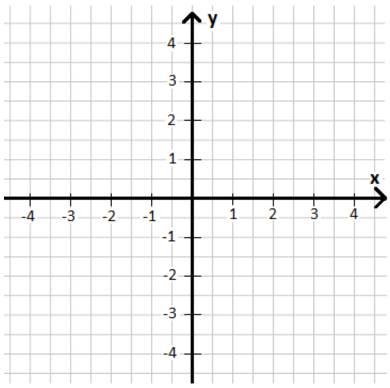
Eine Nullstelle: Scheitelpunkt liegt auf der x-Achse.

$n = 0$



Keine Nullstelle: Scheitelpunkt oberhalb der x-Achse.

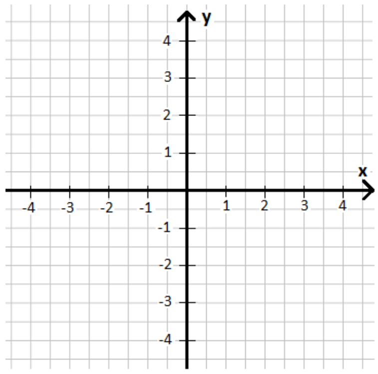
$n > 0$



Fall 2: $\boldsymbol{a < 0}$

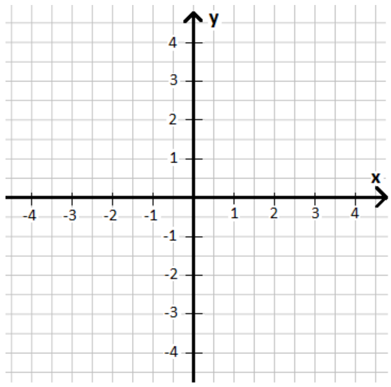
Zwei Nullstellen: Scheitelpunkt liegt oberhalb der x-Achse.

$n > 0$



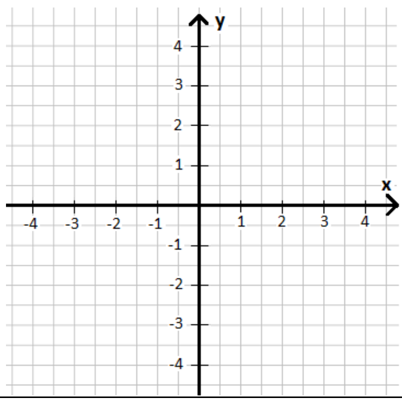
Eine Nullstelle: Scheitelpunkt liegt auf der x-Achse.

$n = 0$



Keine Nullstelle: Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse.

$n < 0$



$\boldsymbol{a > 0}$:

- $n < 0$: 2 Lösungen
- $n = 0$: 1 Lösung
- $n > 0$: Keine Lösung

$\boldsymbol{a < 0}$:

- $n > 0$: 2 Lösungen
- $n = 0$: 1 Lösung
- $n < 0$: Keine Lösung

Bsp. 6) **Ergänze** die **Lücken** so, dass eine **mathematisch korrekte Aussage** entsteht.

a. Ist der Parameter a kleiner als 0 und liegt der Scheitel der Funktion unterhalb der x-Achse, so besitzt die Funktion _________ Nullstelle/n.

b. Ist $a < 0$ und n___0, dann hat der Funktionsgraph genau eine Nullstelle.

c. Ist $a = 3, m = 2\ und\ n = 3$, so besitzt die Funktion ___________ Nullstelle/n.

d. Ist die Parabel nach oben geöffnet und liegt der ____________________ auf der x-Achse, so hat die Funktion genau eine Nullstelle.

e. Ist die y-Koordinate des Scheitelpunktes, also der Parameter ____, größer als 0 und zeigt die Öffnung der Parabel nach unten, dann besitzt die Funktion stets ____________ Nullstelle/n.

f. Ist $a > 0$ und $n < 0$, so hat die Funktion f ___________ Nullstelle/n.

g. Der Scheitel hat eine positive y-Koordinate und die Parabel ist nach __________ geöffnet. Die Funktion besitzt keine Nullstelle.

h. Wenn der Parameter n ______ ist, spielt es keine Rolle, ob der Parameter a ______________ oder _____________ ist, da die Funktion stets eine Nullstelle besitzt.

Bsp. 7) Gegeben ist eine **falsche**, **mathematische Aussage**. Korrigiere einen Teil so, dass sie **wahr** ist. Es gibt dabei verschiedene Möglichkeiten bei jedem Beispiel.

a. Ist der Parameter a größer als 0 und liegt der Scheitel der Funktion unterhalb der x-Achse, so besitzt die Funktion keine Nullstelle.

b. Ist $a = 1, m = 2$ und $n = 3$, dann hat der Funktionsgraph genau eine Nullstelle.

c. Ist die Parabel nach oben geöffnet und liegt der Scheitelpunkt auf der y-Achse, so hat die Funktion genau eine Nullstelle.

d. Ist die y-Koordinate des Scheitelpunktes, also der Parameter m größer als 0 und zeigt die Öffnung der Parabel nach unten, dann besitzt die Funktion stets zwei Nullstellen.

e. Ist $a > 0$ und $n < 0$, so hat die Funktion f keine Nullstellen.

Bsp. 8) Skizziere einen zur quadratischen Gleichung passenden Funktionsgraphen mit den gegebenen Eigenschaften. Zeichne die Nullstelle/n ein.

$m < 0, n > 0,\ Keine\ Lösung$	$m = 0, n = 0, Parabel\ nach\ oben\ geöffnet$	$2\ Lösungen, a < 0, m = 3$