LÖSUNGEN

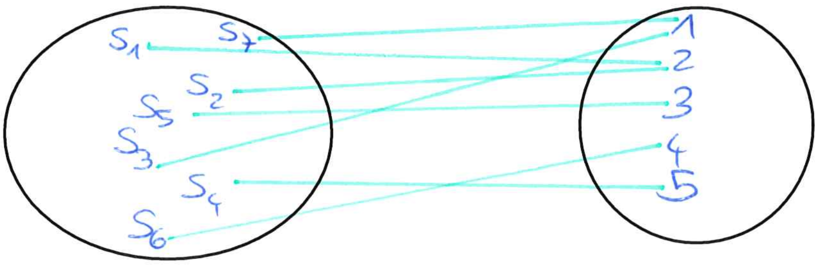
Funktionen – Grundlagen

Video 1/8

1. Definition einer Funktion

Beispiel: Ein Mathematiklehrer verteilt nach einer Schularbeit seinen 7 SchülerInnen S1, S2, S3, S4, S5, S6 und S7 eine Note zwischen 1 und 5.

Definitionsmenge D
= SchülerInnen



Wertemenge W
= Schulnoten

Jede Schülerin bzw. **jeder Schüler** darf nur **eine Note** erhalten! Es können jedoch **mehrere SchülerInnen dieselbe Note** erhalten. Dies ist zugleich die wichtigste Eigenschaft einer Funktion:

Definition (Funktion)

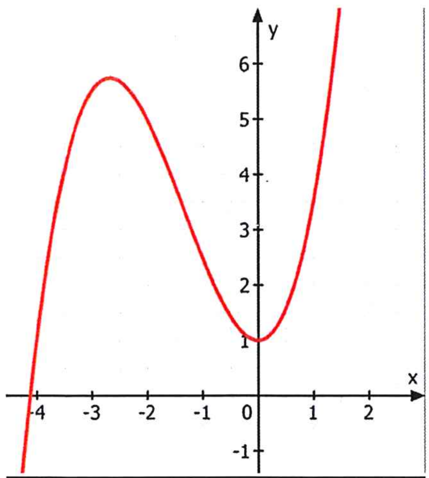
Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung, die jedem Wert aus der **Definitionsmenge D** (Argumente) **genau einen Wert** aus der **Wertemenge W** (Funktionswerte) zuordnet.

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung.

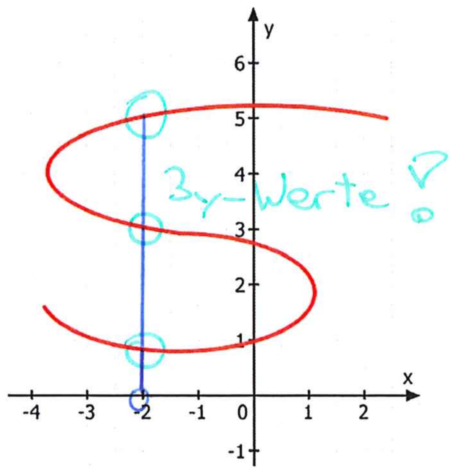
Zusammenfassung:

1. **Jedem Element der Definitionsmenge (=STELLE!)** (x) darf **NUR EIN Element der Wertemenge (=FUNKTIONSWERT)** (y,f(x)) zugeordnet werden.
2. ABER Ein **Element der Wertemenge** (y, f(x)) kann **mehreren Elementen der Definitionsmenge** (x) zugeordnet werden.
   (vgl. das Musterbeispiel der Schülerinnen (x, Definitionsmenge) und der Noten (y, Wertemenge).

Bsp. 1) Welcher der folgenden Graphen stellt eine Funktion dar?



JA!



NEIN!

2. Darstellung einer Funktion

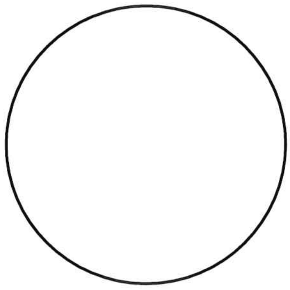
In der Mathematik bestehen die Definitions- und Wertemenge in der Regel aus Zahlen (meist aus den reellen Zahlen). Somit weist die Funktion f jeder Zahl x einer Definitionsmenge eine andere Zahl y einer Wertemenge zu.

Video 2/8

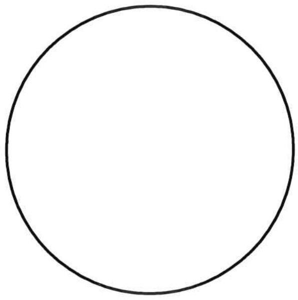
a. Mengendiagramm

Die Elemente der Definitionsmenge werden durch die Funktion mit Elementen der Wertemenge verbunden. Jedes Element der Definitionsmenge muss genau ein Element der Wertemenge erhalten.

Burschen (Definitionsmenge)



Lieblingsfarbe (Wertemenge)



b. Wertetabelle

- Mit Hilfe einer Wertetabelle können Punkte einer Funktion ermittelt werden. Damit kann der Funktionsgraph gezeichnet werden.
- In der ersten Spalten stehen x-Werte, in der zweiten die y-Werte (=Funktionswerte).
- Die **Einheiten** der Größen sollten gegebenfalls angegeben sein. (bei anwendungsorientierten Aufgaben)

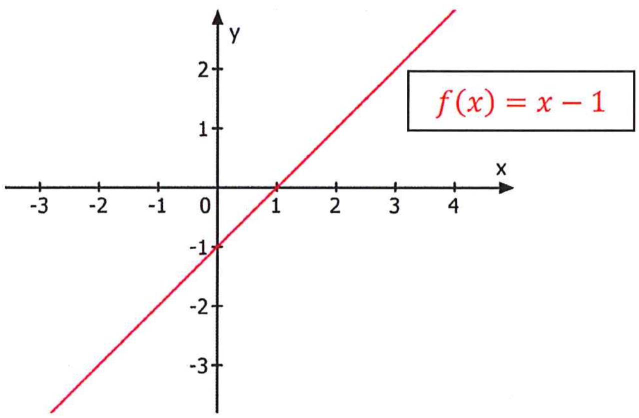
x	$f(x) = x - 1$
-3	−4
-2	−3
-1	−2
0	−1
1	0
2	1
3	2

c. Graph

Um den Graphen einer Funktion zu erhalten, werden Wertepaare in ein Koordinatensystem eingezeichnet:

- Die **x-Werte** werden auf der **waagrechten Achse** (Abszisse) aufgetragen.
- Die **y-Werte** wird auf der **senkrechten Achse** (Ordinate) aufgetragen.
- Die Beschriftung der Achsen ist bei jedem Graphen sehr wichtig. Es muss ersichtlich sein, welche Werte auf den einzelnen Achsen und in welchen Einheiten sie aufgetragen werden.

Die x- und y-Werte aus der Wertetabelle können in einem Koordinatensystem als Punkte mit den Koordinaten (x, y) angegeben werden. Das entstehende Gebilde nennt man dann **Graph der Funktion**.



Bemerkung: Je nach **Funktionstyp** kann der Graph der Funktion z.B. eine Gerade oder auch eine Kurve sein (s.u.).

d. Funktionsgleichung

Die Schreibweise f(x) (gesprochen: „f von x") drückt aus, dass die Größe f von der Größe x abhängt.

$$f(x) = x - 1 \quad < - - \text{ Funktionsgleichung!!!}$$

Die Berechnung vom Umfang eines Quadrats kann auch mit Hilfe einer Funktionsgleichung angegeben werden:

$$u(s) = 4 \cdot s$$

- s... gibt die Seitenlänge eines Quadrats an (in cm)
- u(s)... gibt den Umfang eines Quadrats an (in cm)

Weitere Beispiele für Funktionsgleichungen: $f(x) = x^2$; $f(x) = 3x^2 + 2x - x - 1$; $u(s) = 4 \cdot s$

Bsp. 2) Welche Wertetabelle stellt eine Funktion dar?

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

O JA O NEIN

x	$f(x)$
0	2
1	3
1	4
2	4
3	3
4	2
5	1

O JA O NEIN

x	$f(x)$
-6	3
-4	3
-2	3
0	3
2	3
4	3
6	3

O JA O NEIN

x	$f(x)$
3	0
3	1
3	1
3	2
3	3
3	4
3	5

O JA O NEIN

x	$f(x)$
1	1
1	1
2	1
2	1
3	1
3	1
5	1

O JA O NEIN

x	$f(x)$
1	14
10	9
13	14
17	23
22	20
28	29
33	14

O JA O NEIN

Video 3/8

3. Funktionstypen

1. Konstante Funktion $f(x) = d$

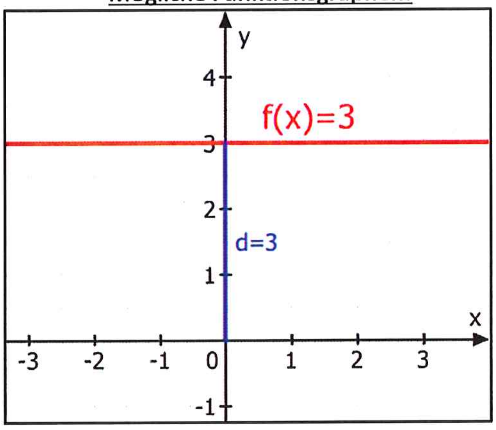
Funktionsgleichung: $f(x) = d$

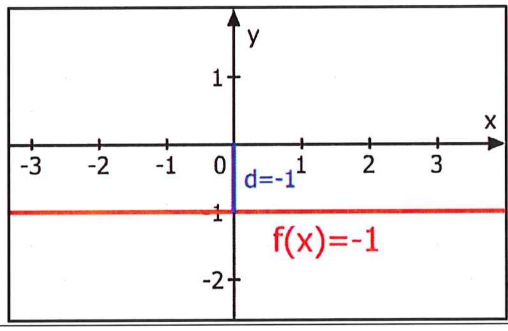
Bei einer konstanten Funktion nimmt die Funktion **für alle Argumente** (=x-Werte) stets den **selben Funktionswert** an.

Der Graph entspricht einer **Gerade OHNE Steigung**, der die y-Achse auf Höhe des Parameters d schneidet. Der Graph verläuft **parallel** zur **x-Achse**!

Die konstante Funktion ist ein Sonderfall der linearen Funktion (mit Steigung $k = 0$).

Mögliche Funktionsgraphen:





PARAMETER

$f(x) = \boldsymbol{d}$

Der **Parameter d** gibt den **Schnittpunkt** mit der **y-Achse** an.

Graphische Bestimmung: Die Strecke vom Ursprung bis zum Schnittpunkt auf der y-Achse entspricht dem Parameter d.

- unterhalb der x-Achse: $d < 0$
- oberhalb der x-Achse: $d > 0$

2. Lineare Funktion $\boldsymbol{f(x) = kx + d}$

Funktionsgleichung: $f(x) = kx + d$

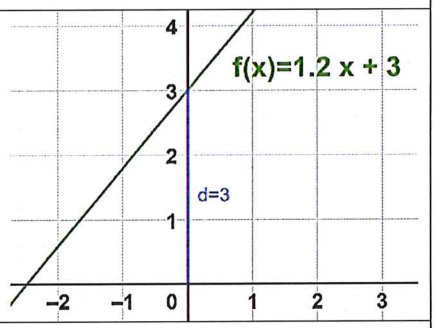
Der **Graph** einer linearen Funktion ist immer eine **Gerade**.

Parameter d (Ordinatenabschnitt oder y-Abschnitt):

Der Parameter d ist der Funktionswert an der Stelle $x = 0$:

$$\boldsymbol{d = f(0)}$$

Der Parameter d wird auch **Ordinatenabschnitt** (oder y-Abschnitt) an und gibt den Wert des **Schnittpunkts** der Geraden mit der **y-Achse** an.



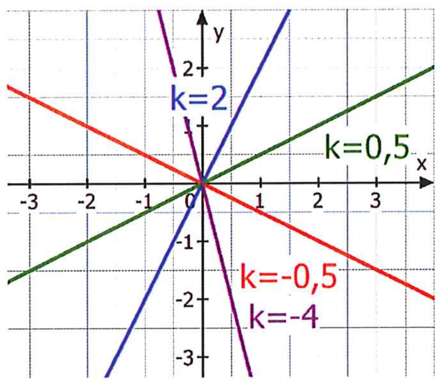
Parameter k (Steigung)

Der Parameter k gibt die **Steigung** der linearen Funktion an. Die Steigung k entspricht der Veränderung des Funktionswertes, wenn sich der x-Wert um +1 erhöht:

$$f(x + 1) = f(x) + k$$

Die Steigung k kann graphisch oder rechnerisch bestimmt werden.

- $\boldsymbol{k > 0}$: Der Graph von f ist „steigend“.
  Je größer k ist, desto stärker steigt die Funktion (Graph ist steiler)
- $\boldsymbol{k < 0}$: Der Graph von f ist „fallend“.
  Je kleiner k ist, desto stärker fällt die Funktion (Graph ist steiler)
- $\boldsymbol{k = 0}$: Der Graph von f ist „konstant“ (keine Steigung)



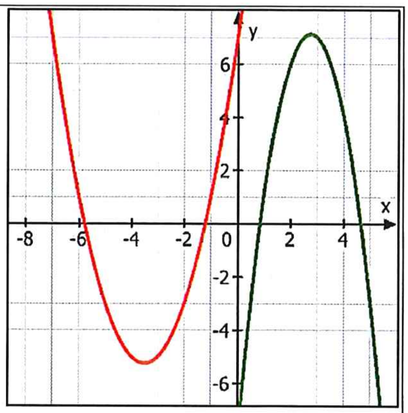
3. Quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$

Funktionsgleichung:

- **Hauptform:** $f(x) = ax^2 + bx + c$

❖ Der Graph einer quadratischen Funktion ist **IMMER** eine **Parabel** und damit ∪- oder ∩-förmig.

❖ Quadratische Funktionen haben immer genau einen **Hoch- oder Tiefpunkt**. Diesen nennt man **Scheitelpunkt** (oder **Scheitel**).

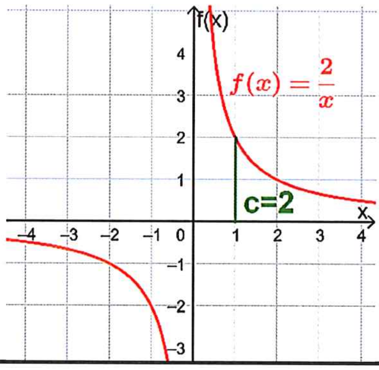


4. Gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{c}{x}$

$c > 0$

$f(x) = \frac{2}{x}$

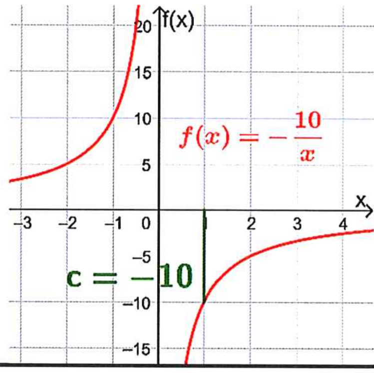
$c = 2$



$c < 0$

$f(x) = \frac{-10}{x}$

$c = -10$

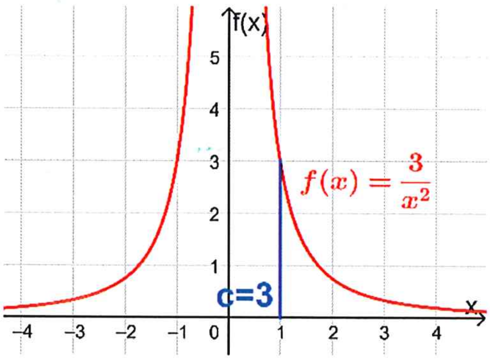


5. Gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{c}{x^2}$

$c > 0$

$f(x) = \frac{3}{x^2}$

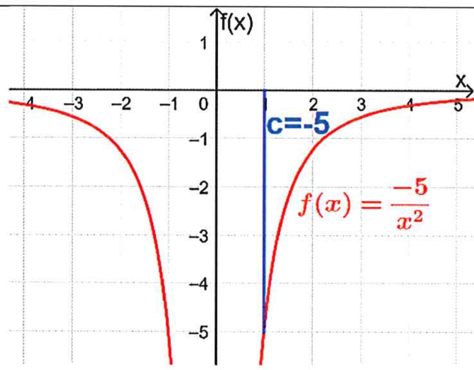
$c = 3$



$c < 0$

$f(x) = \frac{-5}{x^2}$

$c = -5$



Video 4/8

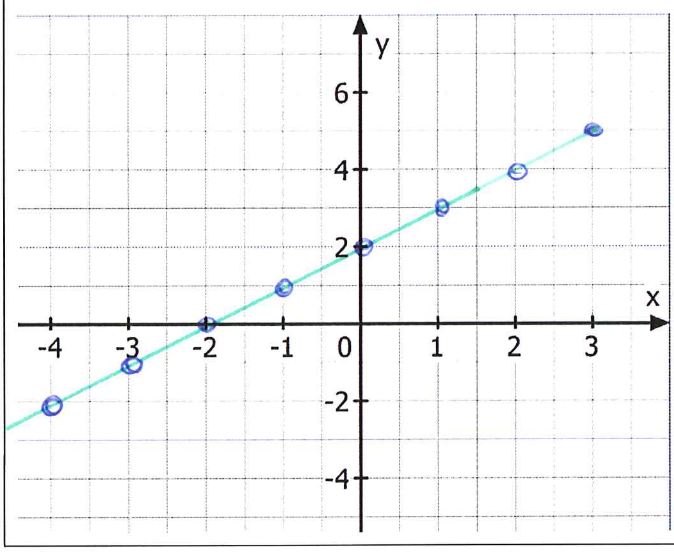
Bsp. 3) Erstelle eine **Wertetabelle** der gegebenen Funktion im vorgegebenen Intervall.
Skizziere den **Graphen** der Funktion.

$f(x) = x + 2 \quad im\ Intervall\ [-4; 3]$

Bemerkung: Die Funktion $f(x) = x + 2$ ist eine lineare Funktion. Der **Graph** einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.

x	$y = f(x)$
-4	-2
-3	-1
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4
3	5

$f(-4) = -4 + 2 = -2$

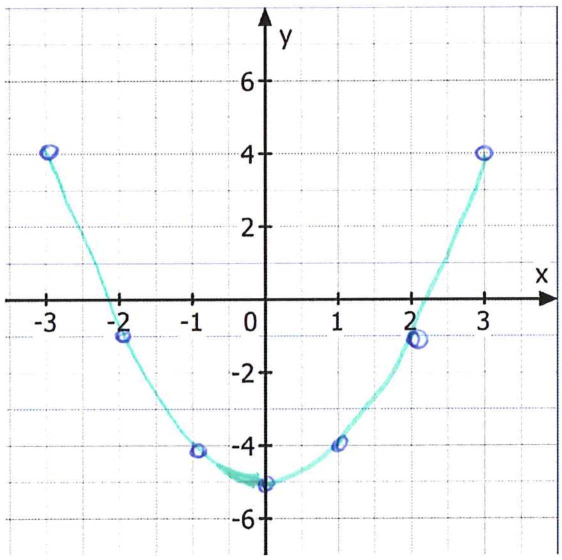


$f(x) = x^2 - 5\ im\ Intervall\ [-3; 3]$

Bem.: Die Funktion $f(x) = x^2 - 5$ ist eine **quadratische Funktion**. Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine **Parabel**.

x	$y = f(x)$
-3	4
-2	-1
-1	-4
0	-5
1	-4
2	-1
3	4

$f(-3) = 9 - 5 = 4$
$f(-2) = 4 - 5 = -1$



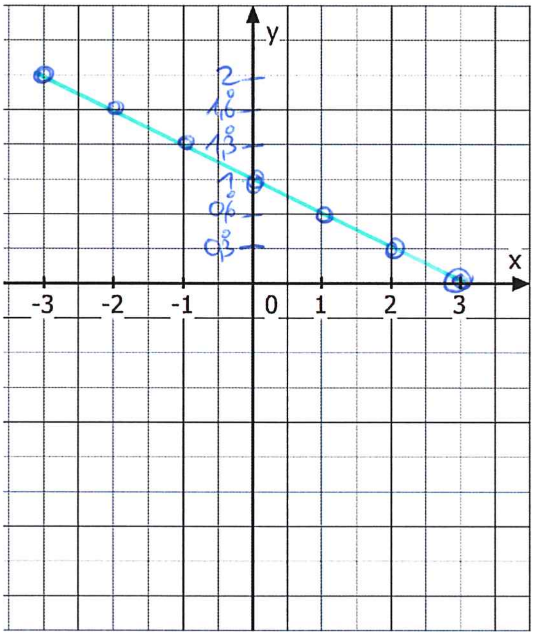
Bsp. 4) Erstelle eine Wertetabelle und zeichne die Funktion im Intervall [-3;3]. Wähle eine passende Skalierung der y-Achse. Gib den Funktionstyp an (Konstante, Lineare, Quadratische Funktion)

a. $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

x	$f(x)$
-3	2
-2	1,6
-1	1,3
0	1
1	0,6
2	0,3
3	0

$f(-3) = 1+1=2$

$f(-2) = \frac{2}{3}+1=1,6$



Funktionstyp: Lineare F.

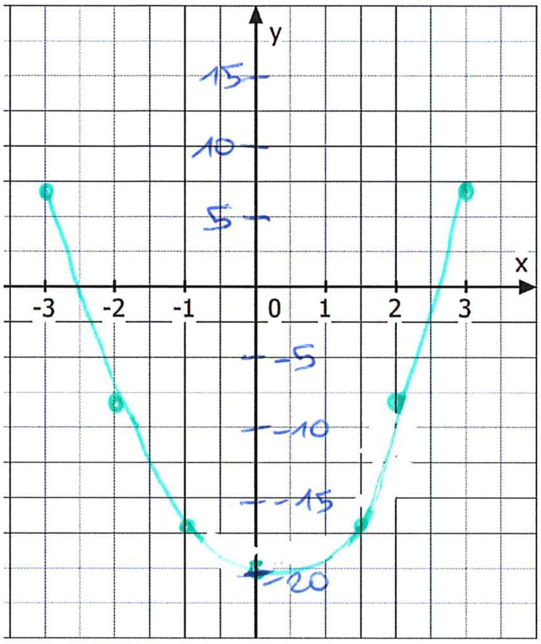
b. $f(x) = 3x^2 - 20$

x	$f(x)$
-3	7
-2	-8
-1	-17
0	20
1	-17
2	-8
3	7

$f(-3) = 3 \cdot 9 - 20 = 7$

$f(-2) = 12 - 20 = -8$

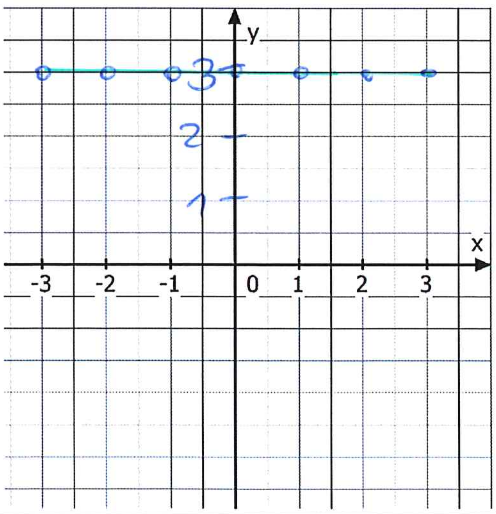
$f(-1) = 3 - 20 = -17$



Funktionstyp: Quadratische F.

c. $f(x) = 3$

x	$f(x)$
-3	3
-2	3
-1	3
0	3
1	3
2	3
3	3

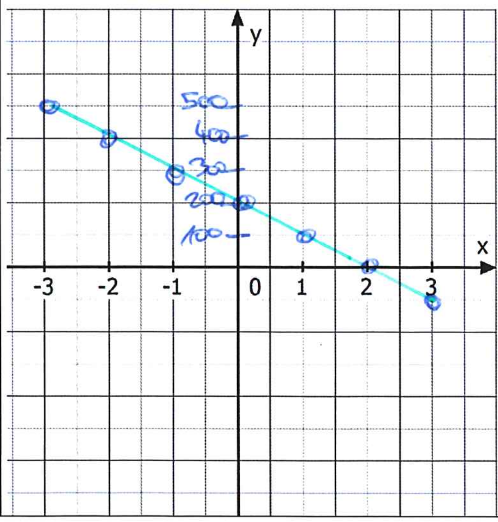


Funktionstyp: Konstante F.

d. $f(x) = -100x + 200$

x	$f(x)$
-3	500
-2	400
-1	300
0	200
1	100
2	0
3	-100

$f(-3) = 300 + 200$



Funktionstyp: Lineare F.

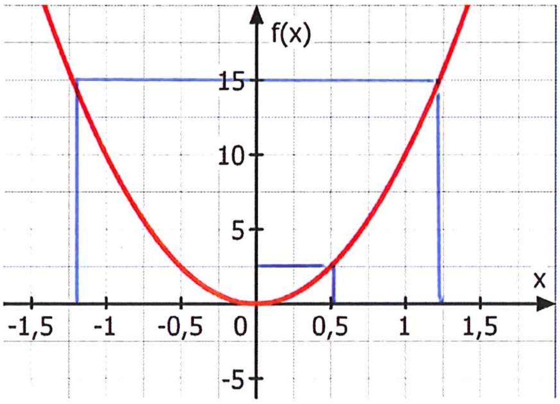
4. Bezeichnungen bei Funktionen

- Die Elemente der Definitionsmenge D einer Funktion nennt man **Argumente** oder **Stellen** einer Funktion.
- Die Elemente der Wertemenge W nennt man **Funktionswerte** einer Funktion.
- $f(x)$ ist der **Funktionswert** der Funktion f **an der Stelle** x.
- Der **Graph** der Funktion f besteht aus den **Punkten** $(x|f(x))$.

SCAN MICH

Video 5/8

Bsp. 5) Ermittle die Lösung graphisch.



$f(0{,}5) =$ 2,5

$f(-1) =$ 10

An welchen Stellen hat die Funktion den Funktionswert $f(x) = 15$?

$x_1 \approx -1{,}2 \quad x_2 \approx 1{,}2$

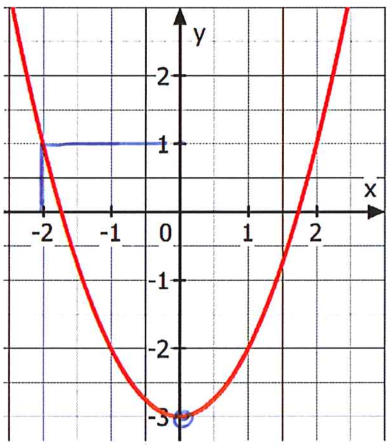
Gib die Koordinaten des Punktes an der Stelle $x = 0{,}5$ an.

$P = (0{,}5|2{,}5)$

Unterschied Stelle (Argument) – Punkt

- Punkte bestehen aus einer x- und y- Koordinate $P = (x, y)$
- Eine Stelle (Ein Argument) ist jedoch nur der zugehörige x-Wert des Punktes P.

Bsp.: *Der Punkt* $P = (3|4)$ *besitzt die Stelle* $x = 3$.



Bsp. 6) Beantworte die Fragen. Bei den Aufgaben (a) und (d) zeichne zusätzlich die graphische Bestimmung ein.

a. $f(-2) =$ 1

b. $f(1) =$ −2

c. Wie lautet der Funktionswert an der Stelle $x = -1$: −2

d. An welcher Stelle/n hat die Funktion den Funktionswert $f(x) = -3$?

$x = 0$

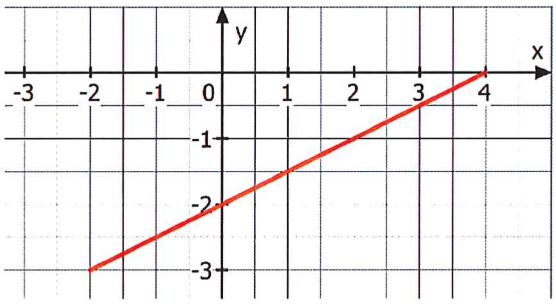
e. An welcher Stelle/n hat die Funktion den Funktionswert $f(x) = 1$?

$x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

Bsp. 7) Gib die **Definitions-** und **Wertemenge** der Funktion an.

$D = [-2; 4]$

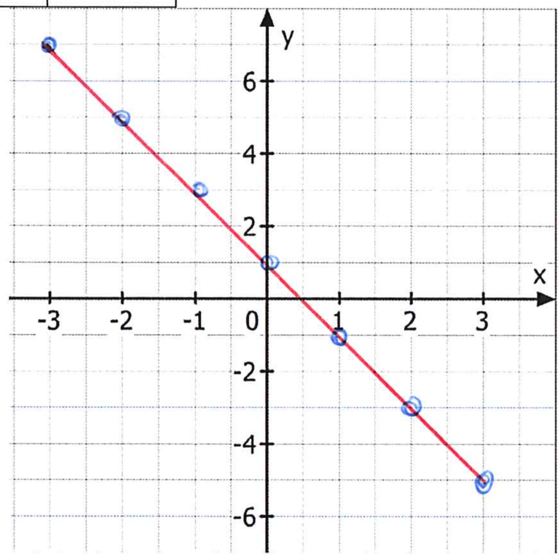
$W = [-3; 0]$



Bsp. 8) Zeichne den Graphen der gegebenen Funktion für die angegebene Definitionsmenge und bestimme die **Wertemenge** der Funktion.

$f(x) = -2x + 1 \;\; ; \;\; D = [-3; 3]$

x	$y = f(x)$
-3	7
-2	5
-1	3
0	1
1	-1
2	-3
3	-5

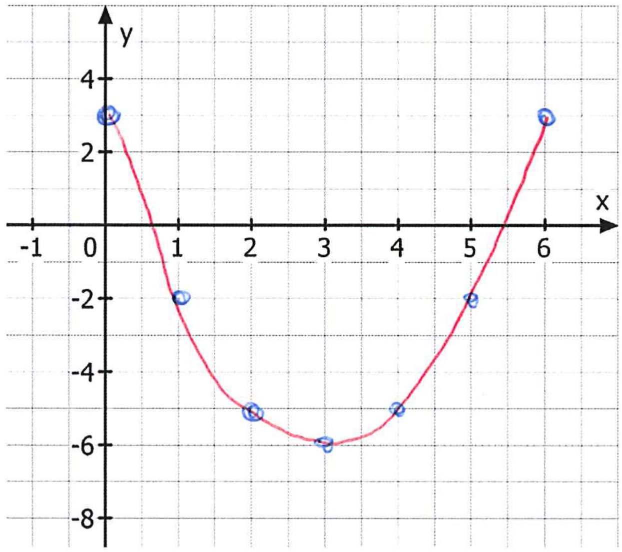


$W_f = [-5; 7]$

$f(x) = x^2 - 6x + 3 \; im \; Intervall \; [0; 6]$

x	$y = f(x)$
0	3
1	-2
2	-5
3	-6
4	-5
5	-2
6	3

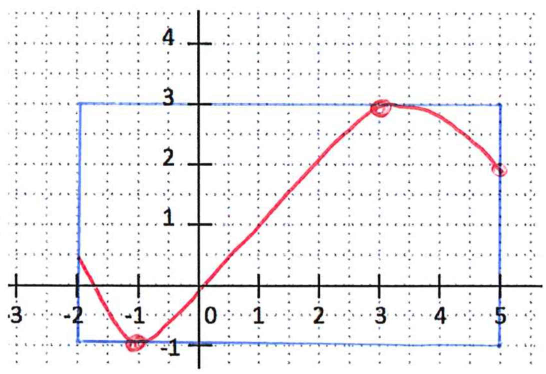
$f(0) = 3$
$f(1) = 1 - 6 + 3 = -2$
$f(2) = 4 - 12 + 3 = -5$
$f(3) = 9 - 18 + 3 = -6$
$f(4) = 16 - 24 + 3 = -5$



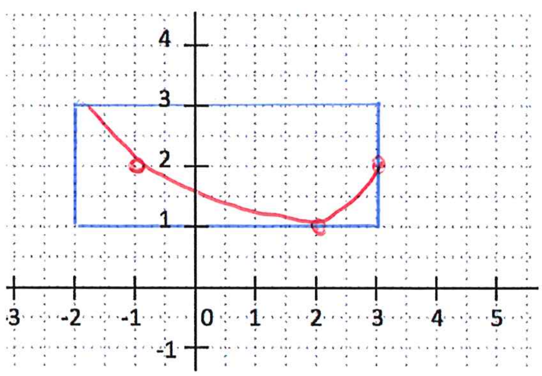
$W_f = [-6; 3]$

Bsp. 9) Skizziere einen **beliebigen Graphen** der Funktion f, für den folgende **Bedingungen** gelten:

- $D_f = [-2; 5]$
- $W_f = [-1; 3]$
- $f(-1) = -1$
- $f(3) = 3$
- $f(5) = 2$



- $D_f = [-2; 3]$
- $W_f = [1; 3]$
- $f(-1) = 2$
- $f(2) = 1$
- $f(3) = 2$



5. Punkte auf einem Funktionsgraphen

Video 6/8

Überprüfung: Liegt ein Punkt auf einer Funktion?

Setze die **x-Koordinate** des Punktes in die **Funktionsgleichung** ein. Stimmt der erhaltene **Funktionswert** mit der **y-Koordinate** des Punktes überein, so liegt der **Punkt** auf dem **Funktionsgraphen**!!!

$A=(5\|\mathbf{3}),\ f(x)=2x-7$ Liegt der Punkt A auf dem Funktionsgraphen? $A=(5\|3)\rightarrow x-Koordinate: x=5$ $f(5)=2\cdot5-7=10-7=\mathbf{3}$ $f(5)=\mathbf{3}\ \&\ A=(5\|\mathbf{3})$ ➔ Der Punkt A liegt auf dem Graphen von $f(x)$.	$A=(2\|\mathbf{3}),\ f(x)=x^2+2x-7$ Liegt der Punkt A auf dem Funktionsgraphen? $A=(2\|3)\rightarrow x-Koordinate: x=2$ $f(2)=2^2+2\cdot2-7=4+4-7=1$ $f(2)=\mathbf{1}\ \&\ A=(2\|\mathbf{3})\rightarrow 1\neq3$ ➔ Der Punkt A liegt **NICHT** auf dem Graphen von $f(x)$.

Bsp. 10) Bestimme, ob der **gegebene Punkt** auf dem Funktionsgraphen der Funktion liegt.

$A=(2\|8), f(x)=x^2+3x-2$ $f(2)=2^2+6-2=\underline{\underline{8}}$ $8=8$ ✓ $A\in f$	$A=(0\|4), f(x)=5x+4$ $f(0)=4$ $4=4$ ✓ $A\in f$	$A=(-1\|-1), f(x)=3x-3$ $f(-1)=-3-3=-6$ $-6\neq-1$ $A\notin f$
$A=(-3\|5), f(x)=x^2+3x+4$ $f(-3)=9-9+4=4$ $4\neq5$ $A\notin f$	$A=(6\|-9), f(x)=-x^2-5x+1$ $f(6)=-36-30+1=-65$ $-65\neq-9$ $A\notin f$	$A=(-2\|10), f(x)=x^2-4x-2$ $f(-2)=4+8-2=10$ $10=10$ ✓ $A\in f$

Beliebige Punkte auf einem Funktionsgraphen bestimmen

Möchtest du zu einer gegebenen Funktion beliebige Punkte des Funktionsgraphen bestimmen, so musst du nur x-Werte in den Funktionsgraphen einsetzen. Der erhaltene Funktionswert entspricht der zugehörigen y-Koordinate des Punktes. (vgl. Wertetabelle)

$\mathrm{f(x)}=3x+7$ **Bestimme drei beliebige Punkte auf dem Funktionsgraphen:** $x=\mathbf{1}\rightarrow f(1)=3\cdot1+7=\mathbf{10}\rightarrow \boldsymbol{A}=(\mathbf{1}\|\mathbf{10})$ $x=\mathbf{-4}\rightarrow f(-4)=3\cdot(-4)+7=-12+7=\mathbf{-5}\rightarrow \boldsymbol{B}=(\mathbf{-4}\|\mathbf{-5})$ $x=\mathbf{3}\rightarrow f(3)=3\cdot3+7=\mathbf{16}\rightarrow \boldsymbol{C}=(\mathbf{3}\|\mathbf{16})$	$\mathrm{f(x)}=-x^2+x-1$ **Bestimme drei beliebige Punkte auf dem Funktionsgraphen:** $x=\mathbf{1}\rightarrow f(1)=-1^2+1-1=-1+1-1=\mathbf{-1}\rightarrow \boldsymbol{A}=(\mathbf{1}\|\mathbf{-1})$ $x=\mathbf{-4}\rightarrow f(-4)=-(-4)^2-4-1=$ $=-16-4-1=\mathbf{-21}\rightarrow \boldsymbol{B}=(\mathbf{-4}\|\mathbf{-21})$ $x=\mathbf{3}\rightarrow f(3)=-3^2+3-1=-9+3-1=\mathbf{-7}\rightarrow \boldsymbol{C}=(\mathbf{3}\|\mathbf{-7})$

Bsp. 11) Bestimme je zwei beliebige Punkte auf dem Funktionsgraphen. Wähle immer verschiedene Argumente (=x-Werte)

$f(x)=x^2+3x-2$ $f(0)=-2 \Rightarrow A=(0\|-2)$ $f(1)=1+3-2=2 \Rightarrow B=(1\|2)$	$f(x)=5x+4$ $f(-4)=-20+4=-16 \Rightarrow A=(-4\|-16)$ $f(8)=40+4=44 \Rightarrow B=(8\|44)$
$f(x)=5x^2-16$ $f(3)=59-16=29$ $A=(3\|29)$ $f(-1)=5-16=-11 \Rightarrow B=(-1\|-11)$	$f(x)=-x^2-5x+1$ $f(7)=-49-35+1=-83 \Rightarrow A=(7\|-83)$ $f(0)=1 \Rightarrow B=(0\|1)$

6. Interpretieren der Funktionssprache

Video 7/8

INTERPRETIEREN
Interpretieren heißt in der Mathematik, die **Bedeutung** eines mathematischen Ausdrucks (Zahl, Koordinate, Term, Gleichung, ...) im geschilderten **Sachzusammenhang** (Kontext) zu **beschreiben**. Bei dieser Beschreibung sollte man **Alltagssprache** verwenden und soweit wie möglich auf **mathematische Formulieren verzichten**.

Bsp. 12) $Z(x)$ bezeichnet die Zeit in Stunden, die x Personen für eine bestimmte Arbeit benötige. Interpretiere folgende Ausdrücke im Kontext.

Ausdruck	Interpretation
$Z(15) = 30$	15 Personen benötigen 30 h für diese Arbeit
$Z(4)$	→ Zeit, die 4 Personen für die Arbeit benötigen
$Z(11) < Z(5)$	11 Personen brauchen kürzer als 5 Personen für diese Arbeit
$Z(6) = \frac{1}{2} \cdot Z(3)$	6 Personen sind doppelt so schnell wie 3 Personen
$Z(1) = Z(3) + 4$	1 Person braucht um 4h länger als 3P.

Bsp. 13) $s(t)$ beschreibt den Weg s (in m), den eine Person in t Minuten zurücklegt. Interpretiere den Ausdruck im Kontext.

Ausdruck	Interpretation
$s(3) = 150$	In 3 min legt die Person 150 m zurück.
$s(7) = s(6) + 50$	In der 7. Minute legt die Person 50 m zurück.
$s(2t) = 2s(t)$	In der doppelten Zeit legt die Person den doppelten Weg zurück
$s(100) - s(90) = 300$	Zwischen der 90. und 100. Minute legt die Person 300 m zurück

Bsp. 14) s(t) beschreibt die Strecke (in km), die ein Auto in t Stunden zurücklegt. Übersetze folgende Aussagen in die Funktionen-Sprache.

Ausdruck	Interpretation
$s(5) = 100$	Nach fünf Stunden hat das Auto 100 km zurückgelegt.
$s(6) = s(4) + 250$	Nach sechs Stunden ist das Auto um 250 km mehr gefahren als nach vier Stunden.
$s(4) = 3 \cdot s(1)$	Nach vier Stunden ist das Auto dreimal soweit gefahren, wie nach einer Stunde.
$s(t+1) - s(t) = 35$	Das Auto legt jede Stunde 35 km zurück.
$\frac{s(8) - s(0)}{8} = 30$	Das Auto hat nach acht Stunden Fahrzeit im Durchschnitt 30km pro Stunde zurückgelegt.

7. Nullstellen einer Funktion

Video 8/8

Ist an einer Stelle x der Funktionswert $f(x)$ gleich 0, so nennt man x eine **Nullstelle** der Funktion f.

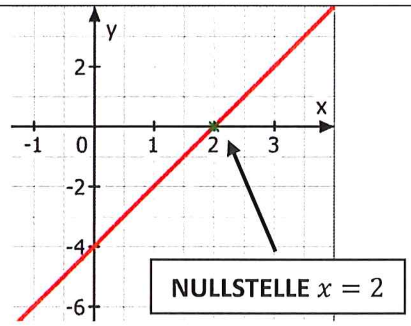
$$\boldsymbol{f(x) = 0}$$

Der Graph schneidet an dieser Stelle die waagrechte Achse (Abszisse).

Willst du die Nullstellen einer Funktion bestimmen, musst du die Gleichung $f(x) = 0$ lösen.

Beispiel: $f(x) = 2x - 4$

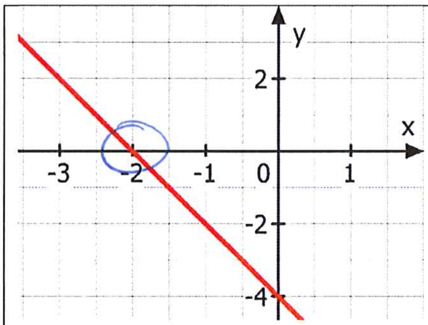
$$f(x) = 0$$
$$2x - 4 = 0 \quad | + 4$$
$$2x = 4 \quad | : 2$$
$$x = 2$$
$$\rightarrow x = 2 \text{ ist eine } \textbf{Nullstelle}$$



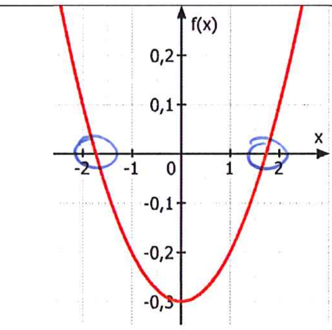
Bsp. 15) Bestimme rechnerisch die Nullstellen der Funktion f.

a. $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ $f(x)=0$ $\frac{1}{3}x + 1 = 0 \quad \| -1$ $\frac{1}{3}x = -1 \quad \| \cdot 3$ $\underline{\underline{x = -3}}$	**b.** $f(x) = -4x$ $-4x = 0 \quad \| :(-4)$ $\underline{\underline{x = 0}}$	**c.** $f(x) = x^2 - x - 12$ $f(x)=0$ Kleine LF: $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} \;/\; \frac{49}{4} \;/\; \frac{7}{2}$ $\underline{\underline{x_1 = 4}} \quad \underline{\underline{x_2 = -3}}$

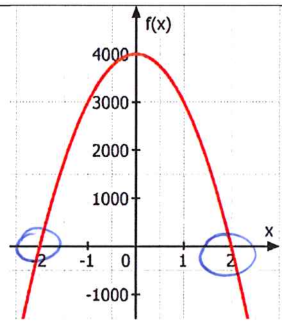
Bsp. 16) Bestimme **graphisch** die Nullstelle/n der Funktion f.



$x = -2$



$x_1 \approx -1{,}8 \quad x_2 = 1{,}8$



$x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

Bsp. 17) Interpretiere die Bedeutung der angegebenen **Nullstelle** im jeweiligen Kontext.

a. $h(t)$ gibt die Höhe h (in m) eines senkrecht hinauf geworfenen Steines t Sekunden nach dem Abwurf an. $h(8) = 0$ Nach 8 Sekunden kommt der Stein wieder auf den Boden auf!	**b.** $W(J)$ gibt das Wirtschaftswachstum W im Jahr J an. $W(2014) = 0$ Im Jahr 2014 gab es kein Wirtschaftswachstum (= konstant!)

8. Berechnungen mit einer Funktionsgleichung

Es gibt stets **zwei Möglichkeiten** (IMMER!!), wie du mit einer Funktion **Berechnungen** durchführen kannst.

Möglichkeit 1: Argument (=Stelle) gegeben -> Funktionswert gesucht

$$f(x) = x^2 - 5$$

Frage: Wie lautet der Funktionswert an der Stelle $x = 2$?

Wenn ein **Argument** gegeben & der **zugehörige Funktionswert** gesucht ist, musst du das Argument in die Funktionsgleichung einsetzen und berechnen:

$$f(2) = 2^2 - 5 = 4 - 5 = \mathbf{-1}$$

Bemerkung: Wenn du zu einem Argument den Funktionswert berechnet hast, kannst du in weiterer Folge die Koordinaten des Punktes bestimmen:

$$f(2) = -1 \quad \rightarrow \quad P = (\mathbf{2} | \mathbf{-1})$$

x-Koordinate y-Koordinate

Möglichkeit 2: Funktionswert gegeben -> Stelle/Argument gesucht

Ist ein Funktionswert gegeben, so musst du diesen Wert STATT deiner Funktion einsetzen. In weiterer Folge musst du die Gleichung lösen, um deine Lösung zu erhalten!!

Bemerkung:

- Bei einer linearen Funktion musst du eine lineare Gleichung lösen!
- Bei einer quadratischen Funktion erhältst du eine quadratische Gleichung!

Fragestellung: Bei welcher/n Stelle/n hat die Funktion einen Funktionswert von $f(x) = \mathbf{10}$?

$f(x) = 2x - 4$ $\mathbf{10} = 2x - 4 \quad \| +4$ $14 = 2x \quad \| : 2$ $7 = x$ An der Stelle $x = 7$ hat die Funktion den Funktionswert 10. Es gilt: $f(7) = 10$	$f(x) = 2x^2 + 4x + 4$ $\mathbf{10} = 2x^2 + 4x + 4 \quad \| -10$ $0 = 2x^2 + 4x - 6$ $2x^2 + 4x - 6 = 0$ **Große Lösungsformel**: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 1$ An den Stellen $x_1 = -3 \; und \; x_2 = 1$ hat die Funktion den Funktionswert 10.

Bsp. 18) Berechne zu der Funktion jeweils den Funktionswert an der Stelle $x = -4, x = 1 \; und \; x = 10$.

$f(x) = -5x + 20$	$f(x) = -x^2 - 2x - 6$
$f(-4) = 20 + 20 = \underline{40}$ $f(1) = \underline{15}$ $f(10) = -50 + 20 = \underline{-30}$	$f(-4) = -(-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 6$ $= -16 + 8 - 6 = \underline{-14}$ $f(1) = -1 - 2 - 6 = \underline{-9}$ $f(10) = -100 - 20 - 6 = \underline{-126}$

Bsp. 19) Berechne das Argument/die Argumente, bei der/denen der gewünscht Funktionswert auftritt.

$f(x) = \frac{1}{3}x + 6$	$f(x) = -x^2 + 2x + 4$
gesucht: $f(x) = -1$? $\frac{1}{3}x + 6 = -1 \quad \mid -6$ $\frac{1}{3}x = -7 \quad \mid \cdot 3$ $\underline{\underline{x = -21}}$	**gesucht**: $f(x) = 1$? $-x^2 + 2x + 4 = 1 \quad \mid -1$ $-x^2 + 2x + 3 = 0$ Große LF: $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12} \mid 16 \mid 4}{-2}$ $x_1 = \frac{-2+4}{-2} = \underline{\underline{-1}}$ $x_2 = \frac{-2-4}{-2} = \underline{\underline{3}}$

Anwendungsorientiertes Beispiel	
WH: Es gibt IMMER zwei Möglichkeiten, um Berechnungen mit einer Funktionsgleichung durchzuführen!	
$h(t) = -0{,}5 \cdot t + 10$ beschreibt die Höhe einer Kerze, die mit zunehmenden Abbrennen immer kleiner wird. Zu Beginn ist die Kerze 10 cm hoch, da $h(0) = 10$ ist. Pro Minute wird die Kerze um 0,5 cm kleiner.	
Möglichkeit 1: Argument („x-Wert") gegeben **-> zugehöriger Funktionswert gesucht (EINSETZEN!)**	**Möglichkeit 2: Funktionswert gegeben** **-> zugehörige/s Argument/e gesucht, bei denen der Funktionswert eintritt (Wert statt $f(x)$, $N(t)$, … einsetzen)**
ARGUMENTE = Zeitpunkte (in diesem Beispiel) ▪ Wie hoch ist die Kerze nach 5 Minuten? **Argument** $t = 5$ -> zugehöriger Funktionswert $h(5)$ gesucht $h(5) = -0{,}5 \cdot 5 + 10 = -2{,}5 + 10 = 7{,}5\ cm$ Ist ein Argument gegeben, so musst du dieses Argument in die Funktionsgleichung einsetzen, um den zugehörigen Funktionswert zu erhalten 😊	FUNKTIONSWERTE = Höhe der Kerze ▪ Wann erreicht die Kerze eine Höhe von 3 cm? **Funktionswert** $h(t) = 3$ -> Argument/Zeitpunkt gesucht!!! $h(t) = -0{,}5 \cdot t + 10$ $3 = -0{,}5 \cdot t + 10 \quad \mid -10$ $-7 = -0{,}5 \cdot t \quad \mid : (-0{,}5)$ $14 = t \rightarrow nach\ 14\ Minuten$ Ist ein Funktionswert gegeben, so musst du diesen Wert statt der Funktion f(x), N(t), … einsetzen und die entstehende Gleichung nach dem Argument auflösen. 😊

Bsp. 20) Das Geburtsgewicht von Moritz (in Gramm) kann mit Hilfe der Funktion $N(t) = 3000 + 300 \cdot t$ angegeben werden. Die Zeit t gibt dabei die Wochen nach der Geburt an.

a. Moritz ist bei seiner Taufe 9 Wochen alt. Welches Gewicht hat er?
b. Wann erreicht Moritz ein Gewicht von 6,3 kg?

① $N(9) = 3000 + 300 \cdot 9 = 5700\ g$ Nach 9 Wochen wiegt er bereits 5,9kg

② $6300 = 3000 + 300 \cdot t \quad \mid -3000$
$3300 = 300 \cdot t \quad \mid :300$
$11 = t$
→ Nach 11 Wochen wiegt er 6,3kg.

Bsp. 21) Bei einem großen Schwimmteich ist am Boden bei der Teichfolie ein Loch entstanden. Ursprünglich waren im Schwimmteich 100 000 Liter Wasser. Pro Minuten rinnen nun 50 Liter Wasser ab. Dieses Modell kann mit Hilfe der Funktionsgleichung $N(t) = 100\,000 - 50 \cdot t$ angegeben werden, wobei N(t) das Wasservolumen nach t Minuten angibt.

a. Nach wie vielen Minuten bzw. Stunden sind nur mehr 15% vom ursprünglichen Wasservolumen im Badeteich?
b. Wie viele Liter Wasser sind nach 2 Stunden noch im Teich?
c. Wann ist der Teich komplett ausgeronnen? (Tipp: Wann sind 0 Liter im Teich)

a) 15% von 100000 = 0,15 · 100000 = 15000 l

$\Rightarrow$ 15000 = 100000 − 50t | −100 000

−85000 = −50t | :(−50)

t = 1700 min = 28,3̇ h

2h = 120 min

b) N(120) = 100 000 − 50 · 120 = 94000 l

c) 0 = 100000 − 50t | +50t

50t = 100000 | :50 $\Rightarrow$ t = 2000 min = 33,3̇ h

Bsp. 22) Ein Bogenschütze schießt einen Pfeil senkrecht in die Höhe. Die Höhe h (in Meter) des Pfeils in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) wird beschrieben durch die Funktionsgleichung:

$$h(t) = -t^2 + t + 2$$

a. Löse die Gleichung $h(t) = 0$ und erkläre die Bedeutung der Lösungen.
b. Nach welcher Zeit hat der Pfeil wieder die Abschusshöhe ($h = 2m$) erreicht?
c. Wie hoch fliegt der Pfeil nach 1,5 Sekunden?

a) h(t) = 0

$-t^2 + t + 2 = 0$

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8} / 3}{-2}$

($t_1 = \frac{2}{-2} = -1$)

$t_2 = \frac{-4}{-2} = 2$

Nach 2 Sekunden kommt der Pfeil am Boden auf!

b) $2 = -t^2 + t + 2$ | −2

$0 = -t^2 + t$

$-t^2 + t = 0$

$t \cdot (-t + 1) = 0$

$t_1 = 0$

START

$-t + 1 = 0$ | +t

$1 = t$

Nach 1 Sekunde!

c) $h(1,5) = -1,5^2 + 1,5 + 2$

= 1,25 m

Nach 1,5 s beträgt die Höhe 1,25 m.